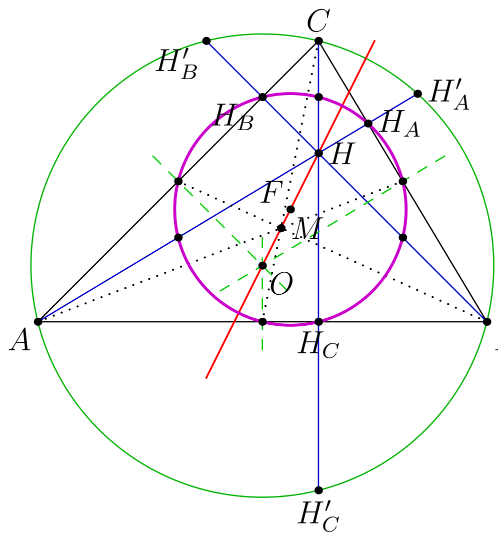


# random(Staszic)

**Niech moc, cyrkiel i linijka będą z Tobą.**

---

1. Rozwiąż w liczbach całkowitych dodatnich $x, y, z$ równanie $x! + y! = z!$.

2. Suma dodatnich liczb rzeczywistych $a_1, \cdots, a_n$ wynosi 1. Udowodnij, że
$$\frac{a_1^2}{a_1+a_2} + \frac{a_2^2}{a_2+a_3} + \cdots + \frac{a_n^2}{a_n+a_1} \geqslant \frac{1}{2}$$

3. Funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$ spełnia równości:
$$f(x) = f(2x) = f(1-x).$$
Dowieść, że $f$ jest okresowa.

4. Niech $n$ będzie liczbą naturalną, $q$ liczbą jedynek w jej zapisie binarnym, a $p$ liczbą zer na końcu zapisu binarnego $n!$. Wykazać, że $n = p + q$.

5. *To chyba było.*

   Dany jest trójkąt $ABC$ w którym $AC = BC$. Punkt $D$ jest środkiem boku $AB$, a punkt $E$ jest rzutem prostokątnym punktu $D$ na prostą $BC$. Punkt $M$ jest środkiem odcinka $DE$. Dowieść, że proste $AE$ i $CM$ są prostopadłe.

6. Okrąg o środku $I$ jest wpisany w trójkąt $ABC$ i styczny do boku $BC$ w punkcie $A'$. Wykazać, że środki odcinków $BC$ i $AA'$ są współliniowe z $I$.

7. Wykaż, że równanie Fermata $x^n + y^n = z^n$ nie ma rozwiązań w $x, y, z \in \mathbb{Z}_+$, gdy $x < n$ (oczywiście $n \in \mathbb{N}$).

8. Rozwiąż następujący układ równań w liczbach rzeczywistych:
$$\begin{cases} x^2 + 1 = 2y \\ y^2 + 1 = 2z \\ z^2 + 1 = 2x \end{cases}$$

9. *I to chyba też.*

   W każde pole nieskończonej szachownicy wpisano liczbę całkowitą dodatnią w taki sposób, że dowolna liczba jest średnią harmoniczną liczb sąsiadujących z nią. Udowodnij, że wszystkie te liczby są parami równe.