MD

1. Ciąg 0123456789101112... jest utworzony przez konkatenację (zapisanie kolejno po sobie) zapisów dziesiętnych kolejnych liczb naturalnych. Jeśli pozycja 10^n w tym ciągu (zaczynającym się od pozycji 1) jest cyfrą z zapisu liczby k-cyfrowej, to przyjmujemy $f(n) = k$. Na przykład $f(2) = 2$, ponieważ setna cyfra w tym ciągu stanowi fragment dwucyfrowej liczby 55. Oblicz $f(100\,005)$.

2. Niech $t(n, k)$ oznacza liczbę podziałów zbioru $\{1, \ldots, n\}$ na k niepustych części, w których istotna jest kolejność elementów w każdej części, ale nieistotna jest kolejność części (np. $\{\langle 1\rangle, \langle 2, 3\rangle\} = \{\langle 2, 3\rangle, \langle 1\rangle\} \neq \{\langle 3, 2\rangle, \langle 1\rangle\}$). Udowodnij, że $t(n, k) = \frac{n!}{k!}\binom{n-1}{k-1}$.

3. Oblicz, na ile sposobów można rozdać 7 dzieciom 21 identycznych cukierków tak, żeby każde dziecko dostało co najmniej 2, ale co najwyżej 4 cukierki.

Źródło: Zadania pochodzą z kolokwium z Matematyki Dyskretnej z UW, 29.03.2010