Největší prvek

czyli największy element chyba:)

kółko I LO Białystok

27 listopada 2012

W wielu zadaniach, zwłaszcza gdy mamy wiele lub nieskończenie wiele elementów, warto patrzeć na szczególne elementy: największą/najmniejszą liczbę, największe pole/obwód itd. Zrozumieć powyższy bełkot można tylko robiąc zadania.

Zadanie 1

W każde pole nieskończonej szachownicy wpisano liczbę całkowitą dodatnią, przy czym każda liczba jest średnią arytmetyczną liczb na polach sąsiadujących bokiem z jej polem. Udowodnij, że wszystkie liczby są równe.

Zadanie 2

Przemek rzucił na stół swoją wygraną w Drużynowym Konkursie Programistycznym, która składała się z garści monet o parami różnych nominałach. Żadna z monet nie upadła na inną.

1. Udowodnij, że pewna moneta była styczna do co najwyżej pięciu innych.
2. Ile maksymalnie wynosiłaby wygrana Przemka, jeżeli byłaby ona wydana w złotówkach :)?

Zadanie 3

Kozik nudząc się zapisał (w systemie dziesiętnym) kolejne liczby od 1 do n na rolce papieru toaletowego. Jacek przyszedłszy powiedział, że napis był palindromem. Dla których n było to możliwe?

Zadanie 4 trzeba coś zgadnąć

Na szachownicy rozmiaru $n \times n$ zapisano w pewnym porządku liczby od 1 do n^2. Niech K oznacza największą spośród różnic pomiędzy elementami sąsiadującymi (bokiem lub po przekątnej). Oszacuj z dołu, w zależności od n, liczbę K. Podaj przykład, że oszacowanie jest dokładne.

Zadanie 5

Zbiór $I \subseteq \mathbb{Z}$ spełnia następujące warunki

1. Jeżeli $a, b \in I$ to $a + b \in I$ oraz $a - b \in I$.
2. Jeżeli $a \in I$ oraz $r \in \mathbb{Z}$ to $ra \in I$.

Sprawdź, że zbiory wielokrotności liczby naturalnej s spełniają te warunki. Uzasadnij, że zbiór I spełniający te warunki jest zbiorem wielokrotności pewnej liczby naturalnej.

Podzbiory I o ww. własnościach nazywa się ideałami. Można rozważać dla nich kongruencje $\bmod I$ *zdefiniowane przez* $a \equiv b \mod I \iff a - b \in I$. *Zwykłe kongruencje* $\bmod n$ *to dokładnie kongruencje* $\bmod \mathbb{Z}n$, *gdzie* $\mathbb{Z}n$ *to zbiór liczb podzielnych przez* n, *to zadanie mówi, że nie ma innych w* $\mathbb{Z}$.

Zadanie 6

Korzystając z poprzedniego zadania udowodnij, że największy wspólny dzielnik D liczb $a_1, \ldots, a_n$ można zapisać jako $D = c_1 a_1 + \ldots + c_n a_n$, gdzie $c_1, \ldots, c_n$ są liczbami całkowitymi.

Zadanie 7

Niech m, n będą takimi liczbami całkowitymi, że w zbiorze $\{1, 2, \ldots, n\}$ znajduje się dokładnie m liczb pierwszych. Dowieść, że wśród dowolnych $m + 1$ liczb z tego zbioru można znaleźć taką, która jest dzielnikiem iloczynu pozostałych m liczb.