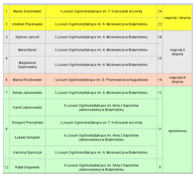

Środek masy

Dajcie mi punkt podparcia, a poruszę Ziemię.

kółko I LO Białystok

7 maja 2013

To kółko jest w dużej części powieleniem starszych; zachęcam do pooglądania rozwiązań na matma.ilo.pl, w szukaj "środek masy". Zadania pochodzą również z deltami i Staszica.

1.1 Teoria

Wszędzie poniżej zakładamy, że jesteśmy w płaszczyźnie lub w przestrzeni i że mamy dany pewien układ współrzędnych (kartezjańskich). Nie będę o tym mówić, ale rozważania nie zależą od wyboru układu.

Dla wygody oznaczeń definiujemy też operacje na punktach – mnożenie przez liczbę rzeczywistą i dodawanie.

Niech $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$ oraz $K \in \mathbb{R}$. Wtedy

$$A + B = (a_1, a_2) + (b_1, b_2) := (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$$

$$K \cdot A = K(a_1, a_2) := (Ka_1, Ka_2)$$

Jeżeli ktoś woli: są to "szkolne" operacje mnożenia przez skalar i dodawania wektorów. Równie dobrze można to robić w trzech wymiarach.

Rozważamy punkty z masami tj. pary (A, m), gdzie A jest punktem, a m jest liczbą rzeczywistą (niekoniecznie dodatnią!) czyli "masą".

Definicja 1. ***Środkiem masy*** *układu punktów $(m_1, A_1), \cdots, (m_n, A_n)$ jest punkt (z masą):*

$$\left(\frac{m_1 \cdot A_1 + \cdots + m_n \cdot A_n}{m_1 + \cdots + m_n}, m_1 + \cdots + m_n\right)$$

o ile $m_1 + \cdots + m_n \neq 0$. Jeżeli $m_1 + \cdots + m_n = 0$ to mówimy, że układ ***nie posiada środka masy****. Wszędzie poniżej unikamy obliczania środków masy układów o sumie mas zerowej.*

Twierdzenie 2 (o przegrupowywaniu). *Załóżmy, że układ $(A_1, m_1), \cdots, (A_n, m_n)$ ma środek masy $\mathcal{M}$ i układ $A_1, \cdots, A_l$ ma środek masy M, wtedy układ $M, A_{l+1}, \cdots, A_n$ także ma środek masy $\mathcal{M}$.*

Intuicyjnie: chcąc obliczyć środek masy możemy zamieniać część punktów na ich środek masy, wyróżniłem akurat punkty $A_1, \cdots, A_l$ tylko ze względu na prostotę oznaczeń ;)

Dowód. Obliczam

$$\mathcal{M} = \left(\frac{m_1 A_1 + \cdots + m_n A_n}{m_1 + \cdots + m_n}, m_1 + \cdots + m_n\right) \quad M = \left(\frac{m_1 A_1 + \cdots + m_l A_l}{m_1 + \cdots + m_l}, m_1 + \cdots + m_l\right)$$

Suma mas układu $M, (A_{l+1}, m_{l+1}), \cdots, (A_n, m_n)$ to $(m_1 + \cdots + m_l) + m_{l+1} + \cdots + m_n$, czyli jest ona niezerowa (bo to masa całego układu) więc środek masy istnieje i wyraża się wzorem

$$\left(\frac{(m_1 + \cdots + m_l)\frac{m_1 A_1 + \cdots + m_l A_l}{m_1 + \cdots + m_l} + m_{l+1} A_{l+1} + \cdots + m_n A_n}{(m_1 + \cdots + m_l) + m_{l+1} + \cdots + m_n}, (m_1 + \cdots + m_l) + m_{l+1} + \cdots + m_n\right) = \mathcal{M}$$

□

Wniosek 3. *Twierdzenie sprowadza liczenie środka masy do liczenia środka masy dwóch punktów.*

Uwaga: jak widać, teoria środka masy jest "nakładką" na liczenie współrzędnych punktów w układzie współrzędnych. Nie daje jej to, a priori, wielkiej siły rażenia, ale wiele zadań polega na problemie typu "to się da policzyć, ale to boli!" i wtedy jest to przydatne.

1.2 Pytania i zadania wstępne

1. Gdzie leży środek masy układu złożonego z jednego punktu?
2. Gdzie leży środek masy układu złożonego z dwóch punktów?
3. Załóżmy, że punkty A, B, C tworzą trójkąt. Czym są (jaka jest konstrukcja) punkty będące środkami ciężkości układów:

- $(A,0),(B,1),(C,1)$,
- $(A,1),(B,1),(C,1)$,
- $(A,-1),(B,1),(C,0)$,
- $(A,-1),(B,1),(C,1)$?

Zadanie 1 Zmiana jednostki
Uzasadnij, że środek masy nie zmieni się, jeżeli wszystkie masy układu pomnożymy przez liczbę dodatnią.

1.3 Zadania nieco prostsze

Zadanie 2
Uzasadnij, że w trójkącie trzy środkowe przecinają się w jednym punkcie, który dzieli każdą z nich w stosunku 2 : 1, licząc od wierzchołka.

Zadanie 3
Niech $ABCD$ będzie wypukłym czworokątem i niech K,L,M,N będą środkami boków AB,BC,CD,DA odpowiednio. Udowodnij, że KM i LN połowią się, więc $KLMN$ jest równoległobokiem i że środek tego równoległoboku pokrywa się ze środkiem odcinka łączącego środki przekątnych.

Zadanie 4
Wykaż, że wszystkie osie symetrii wielokąta przecinają się w jednym punkcie.

Zadanie 5
Czy dla dowolnego punkty S wewnątrz trójkąta ABC da się dobrać masy w punktach A,B i C, żeby środkiem masy było S? Czy fakt, że S leżał wewnątrz trójkąta miał znaczenie?

Zadanie 6
Dany jest czworokąt $ABCD$. Punkty X,Y,Z,T leżą na bokach AB, BC, CD, DA odpowiednio, przy czym $AX/BX = DZ/CZ = 3$ oraz $BY/CY = AT/DT = 5$. Niech E będzie punktem przecięcia XZ i YT. Ile wynosi XE/EZ, a ile YE/TE?

Zadanie 7
Wykaż, że w dowolnym czworościanie odcinki łączące środki przeciwległych krawędzi przecinają się w jednym punkcie.

1.4 $\star$ Zadania nieco ... sami wiecie

Zadanie 8 Twierdzenie Cevy
Punkty X,Y,Z leżą na bokach BC,CA,AB trójkąta ABC odpowiednio. Udowodnij, że proste AX,BY,CZ mają punkt wspólny wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\frac{AZ}{BZ}\cdot\frac{BX}{CX}\cdot\frac{CY}{AY}=1$$

Zadanie 9
Na bokach AB,BC,CA trójkąta ABC wybrano punkty Z,X,Y tak, że

$$\frac{AZ}{BZ}=\frac{BX}{CX}=\frac{CY}{AY}.$$

Dowiedź, że środki ciężkości trójkątów ABC i XYZ pokrywają się.

Zadanie 10
Punkty K i L leżą odpowiednio na bokach BC i CD równoległoboku $ABCD$, przy czym $BK = DL$. Odcinki DK i BL przecinają się w punkcie P. Dowieść, że prosta AP jest dwusieczną kąta BAD.

Wskazówka: warto użyć tw. o dwusiecznej: dwusieczna $\sphericalangle BAC$ dzieli bok BC w stosunku AB/AC, żeby uniknąć kątów.

Zadanie 11
Czy da się znaleźć takie punkty X,Y,Z, leżące na bokach BC,CA,AB pewnego trójkąta ABC takie, że

proste AX, BY, CZ mają punkt wspólny M oraz

$$\frac{AM}{MX} = \frac{BM}{MY} = \frac{CM}{MZ} = 3?$$

Dla jakich innych liczb dodatnich, zamiast 3, da się to zrobić?

Zadanie 12 Twierdzenie van Aubela
Dany jest trójkąt ABC i punkty X, Y, Z leżące na bokach odpowiednio BC, CA, AB. Proste AX, BY, CZ przecinają się w punkcie M. Wykazać, że

$$\frac{AM}{MX} = \frac{AY}{CY} + \frac{AZ}{BZ}.$$

Zadanie 13 Punkty szczególne w trójkącie mające w miarę strawne współrzędne barycentryczne; współrzędne barycentryczne to te masy, które kładziemy w wierzchołkach.

Udowodnić, że jeśli w punktach A, B, C trójkąta położymy masy m_1, m_2, m_3 to środek ciężkości pokryje się z następującym punktem szczególnym trójkąta ABC:

Punkt	masy	objaśnienie
środek ciężkości	$(1, 1, 1)$	
środek okręgu wpisanego	(a, b, c)	długości boków
środek okręgu dopisanego do BC	$(-a, b, c)$	
środek okręgu opisanego	$(\sin 2\alpha, \sin 2\beta, \sin 2\gamma)$	α, β, γ to kąty przy A, B, C
ortocentrum	$(\operatorname{tg}\alpha, \operatorname{tg}\beta, \operatorname{tg}\gamma)$	Co to znaczy dla prostokątnego?
		Najlepiej domnożyć przez $\sin\alpha \sin\beta \sin\gamma$

Zadanie 14
Okrąg wpisany w trójkąt ABC jest styczny do boków BC, CA, AB odpowiednio w punktach D, E, F. Punkt M jest środkiem boku BC, zaś odcinki AM i EF przecinają się w punkcie G. Wykaż, że proste GD i BC są prostopadłe.

Wskazówka: znajdź masy takie, żeby środkiem był punkt G, a potem, by środkiem był środek okręgu wpisanego.