13. kółko - środek masy w geometrii

Teoria

1. Załóżmy, że mamy na płaszczyźnie układ U punktów $A_1, A_2, \cdots, A_n$ i wprowadzony układ współrzędnych. W każdym punkcie $A_i = (x_i, y_i)$ tego układu zawieszamy pewną masę $m(A_i)$ (być może ujemną). Możemy zdefiniować **środek masy** układu U jako punkt
$$M = \left(\frac{m(A_1)x_1 + m(A_2)x_2 + \cdots + m(A_n)x_n}{m(A_1) + m(A_2) + \cdots + m(A_n)}, \frac{m(A_1)y_1 + m(A_2)y_2 + \cdots + m(A_n)y_n}{m(A_1) + m(A_2) + \cdots + m(A_n)}\right)$$
$$\text{z masą } m(M) = m(A_1) + m(A_2) + \cdots + m(A_n)$$
(o ile suma mas nie wynosi 0).
Trochę prościej mówiąc, dla tych, którzy lubią wektory, środek masy jest zdefiniowany przez
$$\vec{OM} = \frac{m(A_1)\vec{OA_1} + \cdots + m(A_n)\vec{OA_n}}{m(A_1) + \cdots + m(A_n)}$$
gdzie O to środek układu współrzędnych (otrzymamy ten sam środek masy dla dowolnego punktu). Prościej mówiąc będzie to „fizyczny” środek masy.

2. Przykłady:
   - Środkiem masy układu 2 punktów o wadze 1 w każdym punkcie jest środek odcinka łączącego te punkty.
   - Środkiem masy układu 2 punktów A, B, takich, że $m(A) = 1, m(B) = 2$ jest punkt leżący na $\frac{2}{3}$ odcinka AB, bliżej B.
   - Środkiem masy układu 2 różnych punktów A, B, takich, że $m(A) = 1, m(B) = -2$ jest punkt M, leżący na prostej AB, taki, że B jest środkiem odcinka AM.
   - Środka masy układu 2 różnych punktów A, B, takich, że $m(A) = 1, m(B) = -1$ nie można sensownie zdefiniować - w mianowniku dostajemy zero. Fizycznie takiego układu także nie da się zbalansować. Można przyjąć, że środek ten leży „w nieskończoności”.

3. Własności środka masy:
   (a) Nie zależy on od wyboru układu współrzędnych,
   (b) Jeżeli środkiem masy układu punktów A, B (z masami $m(A), m(B)$) jest punkt X, to środkiem masy układu A, B, C jest środek masy układu X, C, gdzie $m(X) = m(A) + m(B)$. Innymi słowy, aby obliczyć środek masy pewnego układy punktów możemy liczyć po kolei środki mas układów 2 punktów.
   (c) Jeżeli mamy 2 różne punkty A, B z masami $m(A), m(B)$, to środek M masy tych punktów, jeżeli istnieje, czyli gdy $m(A) + m(B) \neq 0$, leży na prostej AB, ponadto gdy masy są dodatnie, to leży on na odcinku AB i spełnia zależność $|MB|m(B) = |MA|m(A)$.
   (d) **Twierdzenie 0.1 (Twierdzenie o przegrupowywaniu mas)** *Środek masy systemu punktów nie zmieni się, jeżeli zastąpimy część punktów jednym punktem będącym środkiem masy zastąpionych punktów i mający masę równą sumie mas zastąpionych punktów (o ile środek masy zastapionych punktów istnieje).*

4. Zwykle używamy środka masy w zadaniach, gdzie jest dużo dziwnych punktów przecięcia, ale nie ma nic o kątach i nie ma okręgów. Zadania takie mają tezę np. udowodnij, że AD, BE, CF przecinają się w jednym punkcie. Wtedy tak dobieramy masy w pewnych punktach z zadania, żeby móc udowodnić, że środek masy leży na prostej AD, na prostej BE i na prostej CF (przez odp. przegrupowanie mas) i tym samym proste te przecinają się w jednym punkcie (w środku masy).

Zadania

1. Udowodnij, że w trójkącie $\triangle ABC$ środkowe przecinają się w jednym punkcie i że punkt ten pokrywa się ze środkiem masy układu 3 punktów A, B, C z wagami $m(A) = m(B) = m(C) = 1$.

2. Niech D, E, F oznaczają punkty styczności okręgu wpisanego w $\triangle ABC$ do boków BC, CA, AB odpowiednio. Udowodnij, że proste AD, BE, CF przecinają się w jednym punkcie.

3. Niech A, B, C, D będzie równoległobokiem. Dobrać tak masy umieszczone w punktach A, B, C, żeby środek ciężkości tych trzech punktów wypadł w punkcie D.

4. Niech $ABCD$ będzie wypukłym czworokątem i niech K, L, M, N będą środkami boków AB, BC, CD, DA odpowiednio. Udowodnij, że KM i LN połowią się, więc $KLMN$ jest równoległobokiem i że środek tego równoległoboku pokrywa się ze środkiem odcinka łączącego środki przekątnych.

5. Twierdzenie Cevy: Punkty X, Y, Z leżą na bokach BC, CA, AB trójkąta ABC odpowiednio. Udowodnić, że proste AX, BY, CZ mają punkt wspólny wtedy i tylko wtedy, gdy
$$\frac{AZ}{BZ} \cdot \frac{BX}{CX} \cdot \frac{CY}{AY} = 1$$

6. Udowodnić, że w trójkącie $\triangle ABC$ dwusieczne przecinają się w jednym punkcie.

7. * Punkty K i L leżą odpowiednio na bokach BC i CD równoległoboku $ABCD$, przy czym $BK = DL$. Odcinki DK i BL przecinają się w punkcie P. Dowieść, że prosta AP jest dwusieczną kąta BAD (źródło - staszic).

8. ** Na płaszczyźnie mamy dany skończony zbiór różnych punktów $A_1, \cdots, A_n$, który spełnia własność: jeżeli weźmiemy dowolne 2 różne punkty A_i, A_j z tego zbioru i skonstruujemy symetralną l odcinka A_iA_j, to mamy $\{S(A_1), S(A_2), \cdots, S(A_n)\} = \{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$, gdzie $S(X)$ oznacza odbicie punktu X w symetrii względem l, czyli zbiór S nie zmienia się w symetrii względem l. Udowodnić, że $A_1, \cdots, A_n$ są wierzchołkami n-kąta foremnego.

Zadania jubileuszowe

1. Wokół okrągłego stołu siedzi 13 ufoli. Początkowo jeden z ufoli ma 13 czarnych dziur. W jednym ruchu każdy ufol, który posiada co najmniej 2 czarne dziury, może wziąć 2 ze swoich czarnych dziur i podarować po jednej czarnej dziurze każdemu ufolowi siedzącemu obok. Powiedz ufolom, czy może dojść do sytuacji, gdy po pewnej liczbie ruchów każdy ufol ma po jednej czarnej dziurze.

2. Udowodnij, że jeżeli posadzimy wśród ufoli Martę i damy jej $13 + 1$ czarnych dziur, nie zdoła ona rozdzielić tak czarnych dziur, żeby każdy ufol miał po jednej i jedna została Marcie, stosując algorytm opisany w powyższym zadaniu, gdzie Martę traktujemy jako ufola.

3. Mamy 13 osób z klasy $3b$. Niektóre z nich kolegują ze sobą. Jeżeli A uważa B za kolegę, to B uważa A za kolegę. Jest jednak wyjątek: Kozik uważa za kolegów wszystkich, niezależnie od tego, czy oni uważają go za kolegę. Czy może się zdarzyć, że każdy uważa, że ma inną liczbę kolegów?