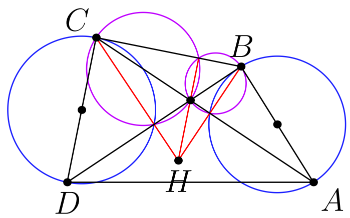

Dajcie mi punkt podparcia, a poruszę Ziemię.

Środek masy

1.1 Teoria

Wszędzie poniżej zakładamy, że jesteśmy w płaszczyźnie lub w przestrzeni i że mamy dany pewien układ współrzędnych (kartezjańskich). Nie będę o tym mówić, ale rozważania nie zależą od wyboru układu.

Dla wygody oznaczeń definiujemy też operacje na punktach – mnożenie przez liczbę rzeczywistą i dodawanie.

Niech $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$ oraz $K \in \mathbb{R}$. Wtedy

$$A + B = (a_1, a_2) + (b_1, b_2) := (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$$

$$K \cdot A = K(a_1, a_2) := (Ka_1, Ka_2)$$

Jeżeli ktoś woli: są to "szkolne" operacje mnożenia przez skalar i dodawania wektorów. Równie dobrze można to robić w trzech wymiarach.

Rozważamy punkty z masami tj. pary (A, m), gdzie A jest punktem, a m jest liczbą rzeczywistą (niekoniecznie dodatnią!) czyli "masą".

Definicja ***Środkiem masy*** *układu punktów $(m_1, A_1), \cdots, (m_n, A_n)$ jest punkt (z masą):*

$$\left(\frac{m_1 \cdot A_1 + \cdots + m_n \cdot A_n}{m_1 + \cdots + m_n}, m_1 + \cdots + m_n\right)$$

o ile $m_1 + \cdots + m_n \neq 0$. Jeżeli $m_1 + \cdots + m_n = 0$ to mówimy, że układ ***nie posiada środka masy****.*

Twierdzenie (o przegrupowywaniu) *Załóżmy, że układ $(A_1, m_1), \cdots, (A_n, m_n)$ ma środek masy $\mathcal{M}$ i układ $A_1, \cdots, A_l$ ma środek masy M, wtedy układ $M, A_{l+1}, \cdots, A_n$ także ma środek masy $\mathcal{M}$.*

Intuicyjnie: chcąc obliczyć środek masy możemy zamieniać część punktów na ich środek masy, wyróżniłem akurat punkty $A_1, \cdots, A_l$ tylko ze względu na prostotę oznaczeń ;)

Dowód. Obliczam

$$\mathcal{M} = \left(\frac{m_1 A_1 + \cdots + m_n A_n}{m_1 + \cdots + m_n}, m_1 + \cdots + m_n\right) \quad M = \left(\frac{m_1 A_1 + \cdots + m_l A_l}{m_1 + \cdots + m_l}, m_1 + \cdots + m_l\right)$$

Suma mas układu $M, (A_{l+1}, m_{l+1}), \cdots, (A_n, m_n)$ to $(m_1 + \cdots + m_l) + m_{l+1} + \cdots + m_n$, czyli jest ona niezerowa (bo to masa całego układu) więc środek masy istnieje i wyraża się wzorem

$$\left(\frac{(m_1 + \cdots + m_l)\frac{m_1 A_1 + \cdots + m_l A_l}{m_1 + \cdots + m_l} + m_{l+1} A_{l+1} + \cdots + m_n A_n}{(m_1 + \cdots + m_l) + m_{l+1} + \cdots + m_n}, (m_1 + \cdots + m_l) + m_{l+1} + \cdots + m_n\right) = \mathcal{M}$$

■

1.2 Pytania i problemy wstępne

1. Gdzie leży środek masy układu złożonego z jednego punktu?

2. Gdzie leży środek masy układu złożonego z dwóch punktów?

   Uwaga: to pytanie, wbrew prostocie jest **kluczowe**, gdyż obliczenie środka ciężkości dowolnego układu sprowadza się do obliczania środków masy dla par punktów.

3. Załóżmy, że punkty A, B, C tworzą trójkąt. Czym są (jaka jest konstrukcja) punkty będące środkami ciężkości układów:

- $(A, 0), (B, 1), (C, 1)$,
- $(A, 1), (B, 1), (C, 1)$,
- $(A, -1), (B, 1), (C, 0)$,
- $(A, -1), (B, 1), (C, 1)$?

Twierdzenie (współrzędne barycentryczne) *Niech ABC będzie trójkątem na płaszczyźnie. Dla każdego punktu D tej płaszczyzny da się tak dobrać masy m_1, m_2, m_3, że $(D, m_1 + m_2 + m_3)$ jest środkiem ciężkości $(A, m_1), (B, m_2), (C, m_3)$.*

Jeżeli dodatkowo nałożymy warunek, że $m_1 + m_2 + m_3$ musi być równe 1 (żeby uniknąć niejednoznaczności typu $(A, 1), (B, 1), (C, 1)$ i $(A, 2), (B, 2), (C, 2)$), to takie masy da się dobrać na dokładnie jeden sposób.

Masy m_1, m_2, m_3 nazywają się współrzędnymi barycentrycznymi D.

Rozwiązywanie geometrii przy użyciu środka masy polega na dobraniu mas do istniejących punktów, tak, aby środek masy był czymś ciekawym. Działa to świetnie z "udowodnić, że 1000 linii przecina się w jednym punkcie", czy że jakiś odcinek dzieli się w danym stosunku a o wiele gorzej z okręgami czy kątami.

1.3 Zadania

1. Niech $ABCD$ będzie wypukłym czworokątem i niech K, L, M, N będą środkami boków AB, BC, CD, DA odpowiednio. Udowodnij, że KM i LN połowią się, więc $KLMN$ jest równoległobokiem i że środek tego równoległoboku pokrywa się ze środkiem odcinka łączącego środki przekątnych.

2. **Twierdzenie (Cevy)** *Punkty X, Y, Z leżą na bokach BC, CA, AB trójkąta ABC odpowiednio. Udowodnij, że proste AX, BY, CZ mają punkt wspólny wtedy i tylko wtedy, gdy*
$$\frac{AZ}{BZ} \cdot \frac{BX}{CX} \cdot \frac{CY}{AY} = 1$$

3. Na bokach AB, BC, CA trójkąta ABC wybrano punkty Z, X, Y tak, że
$$\frac{AZ}{BZ} = \frac{BX}{CX} = \frac{CY}{AY}.$$
Dowiedź, że środki ciężkości trójkątów ABC i XYZ pokrywają się.

4. **Twierdzenie (van Aubela)** *Dany jest trójkąt ABC i punkty X, Y, Z leżące na bokach odpowiednio BC, CA, AB. Proste AX, BY, CZ przecinają się w punkcie M. Wykazać, że*
$$\frac{AM}{MX} = \frac{AY}{CY} + \frac{AZ}{BZ}.$$

5. *Punkty szczególne w trójkącie mające w miarę strawne współrzędne barycentryczne.*

   Udowodnić, że jeśli w punktach A, B, C trójkąta położymy masy m_1, m_2, m_3 to środek ciężkości pokryje się z następującym punktem szczególnym trójkąta ABC:

Punkt	masy	objaśnienie
środek ciężkości	$(1, 1, 1)$	
środek okręgu wpisanego	(a, b, c)	długości boków
środek okręgu dopisanego do BC	$(-a, b, c)$	
środek okręgu opisanego	$(\sin 2\alpha, \sin 2\beta, \sin 2\gamma)$	α, β, γ to kąty przy A, B, C

6. Weźmy trójkąt ABC.

   Załóżmy, że parami różne punkty T, U, V mają współrzędne barycentryczne $(t_1, t_2, t_3), (u_1, u_2, u_3), (v_1, v_2, v_3)$. Uzasadnić, że punkty te leżą na jednej prostej wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją takie niezerowe liczby rzeczywiste α, β, γ, że
$$\alpha(t_1, t_2, t_3) + \beta(u_1, u_2, u_3) + \gamma(v_1, v_2, v_3) = 0.$$

7. Dany jest czworokąt $ABCD$. Punkty X, Y, Z, T leżą na bokach AB, BC, CD, DA odpowiednio, przy czym $AX/BX = DZ/CZ = 3$ oraz $BY/CY = AT/DT = 5$. Niech E będzie punktem przecięcia XZ i YT. Ile wynosi XE/EZ, a ile YE/TE?

8. Punkty K i L leżą odpowiednio na bokach BC i CD równoległoboku $ABCD$, przy czym $BK = DL$. Odcinki DK i BL przecinają się w punkcie P. Dowieść, że prosta AP jest dwusieczną kąta BAD. Źródło: Staszic

   Wskazówka: warto użyć tw. o dwusiecznej: dwusieczna $\angle BAC$ dzieli bok BC w stosunku AB/AC, żeby uniknąć kątów.