Lemaciki

czyli za co kochamy geometrię.

Joachim Jelisiejew

6 września 2011

Wszystkich poniższych lematów dowodzi się za pomocą elementarnych narzędzi takich jak przystawanie, czy kąty wpisane. Tym niemniej warto o nich pamiętać i przypomnieć sobie przed II etapem OM. Na stronie drugiej umieszczone są wskazówki. Ale dowody lemacików trzeba znać!

Lemat 1

W dowolnym trójkącie $\triangle ABC$ nierówność $AB \geqslant BC$ jest równoważna $\sphericalangle ACB \geqslant \sphericalangle BAC$.

Lemat 2

Niech M będzie środkiem boku BC trójkąta $\triangle ABC$. Wtedy

$$2 \cdot AM < AB + AC.$$

Lemat 3

Niech D, E, F będą spodkami wysokości opuszczonych odpowiednio z wierzchołków A, B, C trójkąta ostrokątnego ABC oraz niech H będzie ortocentrum $\triangle ABC$. Wtedy H jest środkiem okręgu wpisanego w $\triangle DEF$.

Lemat 4

Niech H będzie ortocentrum w trójkącie $\triangle ABC$, a o będzie okręgiem opisanym na $\triangle ABC$. Wtedy odbicia H względem boków trójkąta $\triangle ABC$ leżą na o.

Lemat 5

Niech O będzie środkiem okręgu opisanego na $\triangle ABC$, niech A_1, B_1, C_1 będą środkami BC, CA, AB odpowiednio. Udowodnij, że O jest ortocentrum $\triangle A_1B_1C_1$.

Lemat 6

Niech o będzie okręgiem opisanym na trójkącie $\triangle ABC$, I będzie środkiem okręgu wpisanego w $\triangle ABC$, a K będzie punktem przecięcia dwusiecznej $\sphericalangle BAC$ z o (innym niż A).

Wówczas $|IK| = |BK| = |CK|$, w szczególności K leży na symetralnej BC.

Lemat 7

Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w $\triangle ABC$, a punkty K, L, M są punktami przecięcia AI, BI, CI odpowiednio z okręgiem opisanym na $\triangle ABC$ (różnymi od A, B, C). Dowiedź, że I jest ortocentrum KLM.

Lemat 8

Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ostrokątny $\triangle ABC$, punkty K, L, M są punktami przecięcia AI, BI, CI odpowiednio z okręgiem opisanym na $\triangle ABC$. Punkty A', B', C' są punktami przecięcia odpowiednio: AK i ML, BL i MK oraz CM i KL. Dowiedź, że trójkąty $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ są jednokładne.

Lemat 9

Punkty K, L, M są rzutami punktu J odpowiednio na boki BC, CA, AB trójkąta $\triangle ABC$. Oblicz, w zależności od $|AB|, |BC|, |CA|$, odległości punktu K od B i C, punktu L od C i A oraz punktu M od A i B, jeżeli

1. J jest środkiem okręgu wpisanego w $\triangle ABC$,
2. J jest środkiem okręgu dopisanego do boku BC trójkąta $\triangle ABC$.

Wskazówka 1
Jeżeli $AB \geqslant BC$ to wybieramy na AB punkt D taki, że $BD = BC$. Wtedy $\sphericalangle BAC + \sphericalangle DCA = \sphericalangle BDC = \sphericalangle BCD$, więc $\sphericalangle BAC < \sphericalangle BCD < \sphericalangle BCA$.
Podobnie, jeżeli $\sphericalangle ACB \geqslant \sphericalangle BAC$, to możemy wybrać D na boku AB tak, że $\sphericalangle DAC = \sphericalangle DCA$, wtedy $BC < BD + DC = BD + DA = AB$.

Wskazówka 2
Niech D będzie takim punktem, że $ABCD$ jest równoległobokiem. Wtedy $2 \cdot AM = AD < AB + BD$.

Wskazówka 3
Skoro $\sphericalangle HFA = \sphericalangle HEA = 90°$, to na czworokącie $HEAF$ można opisać okrąg, stąd $\sphericalangle HFE = \sphericalangle HAE = 90° - \sphericalangle BCA$. Podobnie dla pozostałych kątów.

Wskazówka 4
Niech $\sphericalangle := BAC$, wtedy $\sphericalangle BHC = 180° - \alpha$. Niech H' będzie odbiciem H względem BC, wtedy $\sphericalangle BH'C + \sphericalangle BAC = 180°$, więc A, B, C, H' leżą na jednym okręgu.

Uwaga: Mamy także $\sphericalangle BHC + \sphericalangle BAC = 180°$. Dlaczego stąd nie wynika, że A, B, C, H leżą na jednym okręgu?

Wskazówka 5
Mamy $A_1B_1 \parallel AB \perp OC_1$, więc OC_1 jest wysokością w $\triangle A_1B_1C_1$.

Wskazówka 6
Z równości $\sphericalangle KAB = \sphericalangle KAC$ mamy $KB = KC$. Obliczamy, że $\sphericalangle AKB = \sphericalangle ACB$. Ponadto $\sphericalangle IBK = \sphericalangle IBC + \sphericalangle CBK = (\sphericalangle ABC + \sphericalangle CAB)/2$. Z sumy kątów w trójkącie stwierdzamy, że $\sphericalangle KIB = \sphericalangle IBK$.

Tradycyjnie: chcemy coś wiedzieć o odcinkach, to rąbiemy z kątów.

Wskazówka 7
Trzeba przeliczyć bezpośrednio, że odpowiednie kąty sumują się do $90°$, korzystając z fakty, że K, L, M są połówkami odpowiednich łuków.

Wskazówka 8
Na mocy poprzednich lematów I jest ortocentrum KLM i A_1, B_1, C_1 są spodkami wysokości, więc $\sphericalangle IA_1B_1 = \sphericalangle IMB_1 = \sphericalangle CMK = \sphericalangle IAB$, więc $A_1B_1 \parallel AB$, podobnie dla pozostałych boków. Teraz z twierdzenia Talesa stwierdzamy, że $IA : IA_1 = IB : IB_1 = IC : C_1$.

Wskazówka 9
Oba obliczenia przeprowadzone są następująco: styczne z punktów A, B, C do okręgu są równe, co daje trzy równania i rozwiązujemy odpowiedni układ równań.

Odpowiedź: niech $a = |BC|$, $b = |AC|$, $c = |AB|$. Dla J — środka okręgu wpisanego:

$$KB = MB = \frac{a+c-b}{2}, \quad KC = LC = \frac{a+b-c}{2}, \quad MA = LA = \frac{b+c-a}{2}.$$

Dla J będącego środkiem okręgu dopisanego do BC:

$$KB = MB = \frac{a+b-c}{2}, \quad KC = LC = \frac{a+c-b}{2}, \quad LA = MA = \frac{a+b+c}{2}.$$