Kongruencje

Joachim Jelisiejew
6 września 2011

Typ problemu:

Zadanie 1

Oblicz ostatnią cyfrę liczb:

1. $2^2 + 1^2$,
2. $1202^2 + 61^2$,
3. $7^4 \cdot 2^5$,
4. $34067 \cdot 2345$,
5. $5^4 \cdot 3^6 + 6^3$,
6. $\star$ 2^{32},
7. $\star$ 2^{100},
8. $\star$ $2^{2^{100}}$,

Zadanie 2

Oblicz resztę z dzielenia przez 3 liczb:

1. $2^2 + 1^2$,
2. $1202^2 + 61^2$,
3. $7^4 \cdot 2^5$,
4. $34067 \cdot 2345$,
5. $5^4 \cdot 2^6 + 7^3$,
6. $\star$ 2^{32},
7. $\star$ 2^{100},
8. $\star$ $2^{2^{100}}$,

Podajemy tutaj zapis, który może wydawać się straszny, ale w rzeczywistości jest bardzo wygodny. Wszystkie liczby w poniższych definicjach są całkowite.

Definicja *Mówimy, że a* przystaje do b modulo n*, jeżeli liczby a, b dają taką samą resztę z dzielenia przez n, innymi słowy, gdy $n \big| a-b$. Oznaczamy tę sytuację $a \equiv b \mod n$.*

Pewne zastanawiające własności są takie:

1. *jeżeli $a \equiv b \mod n$, to $b \equiv a \mod n$.*
2. *jeżeli $a \equiv b \mod n$ i $b \equiv c \mod n$, to $a \equiv c \mod n$.*

Twierdzenie *Jeżeli $a \equiv b \mod n$ oraz $a' \equiv b' \mod n$, to*

1. *$a + a' \equiv b + b' \mod n$,*
2. *$a - a' \equiv b - b' \mod n$,*
3. *$a \cdot a' \equiv b \cdot b' \mod n$.*
4. *$a^m \equiv b^m \mod n$, dla każdego m naturalnego, np. $a^2 \equiv b^2 \mod n$.*

Przykład *Obliczyć resztę z dzielenia przez 7 liczby $45^3 \cdot 54^2$.*

Rozwiązanie. Trik polega na redukowaniu obliczeń do małych liczb:

Zauważmy, że $45 \equiv -4 \mod 7$ (bo $7 \big| 45 - (-4) = 49$), więc $45^3 \equiv (-4)^3 = -64 \mod 7$. Ale $-64 \equiv -1 \mod 7$, więc $45^3 \equiv -1 \mod 7$.

Analogicznie, obliczamy $54 \equiv 5 \mod 7$, więc $54^2 \equiv 5^2 = 25 \mod 7$. Ale $25 \equiv 4 \mod 7$, więc $54^2 \equiv 4 \mod 7$.

Łącznie $45^3 \equiv -1 \mod 7$ i $54^2 \equiv 4 \mod 7$, więc $45^3 \cdot 54^2 \equiv -1 \cdot 4 = -4 \mod 7$.

Trzeba jeszcze zauważyć, że $-4 \equiv 3 \mod 7$.

Odpowiedź: liczba $45^3 \cdot 54^2$ daje resztę 3 z dzielenia przez 7.

$\star$ **Zadanie 3**

Dowiedź, że liczba n daje taką samą resztę z dzielenia przez 9, jak suma cyfr n.

$\star$ **Zadanie 4**

Dowiedź, że liczba n daje taką samą resztę z dzielenia przez 11, jak cyfry n zsumowane ze znakami $+$ i $-$ na przemian: np. 123 daje taką samą resztę jak $1 - 2 + 3 = 2$.