Co ty wiesz o kombinowaniu?

1. W przestrzeni danych jest 6 punktów, z których żadne cztery nie leżą na jednej płaszczyźnie. Łącząc niektóre z tych punktów narysowano 10 odcinków. Wykaż, że w ten sposób uzyskano co najmniej jeden trójkąt.

2. W kole o promieniu 1 są 64 punkty. Udowodnić, że w pewnym kole o promieniu $\frac{1}{2}$ znajduje się 10 z tych punktów.

3. Na przyjęciu w krainie Baranów, Dymówek, Kaczek, Koników i Małp jest n dziewcząt i n chłopców. Każda dziewczyna lubi r chłopców, a każdy chłopiec lubi s dziewcząt. Udowodnić, że jeżeli $r + s > n$, to istnieje para, która lubi się nawzajem, a jeżeli $r + s \leq n$ to może być tak, że każde uczucie jest nieodwzajemnione.

4. Szachownicę $n \times n$ pokrywamy białymi i czarnymi trójkątami prostokątnymi równoramiennymi o przyprostokątnych równych 1 (każde pole dwoma trójkątami). Trójkąty mające wspólny bok mają mieć różny kolor. Ile jest różnych ułożeń trójkątów?

5. W turnieju uczestniczy $2n$ graczy. Każdych dwóch gra ze sobą co najwyżej raz. Udowodnij, że jeśli nie istnieje trójka graczy, którzy rozegrali ze sobą wszystkie trzy mecze, to łączna liczba rozegranych meczów nie przekracza n^2.

6. W każdej z trzech szkół uczy się n uczniów. Każdy uczeń ma w pozostałych szkołach razem co najmniej $n + 1$ znajomych. Udowodnij, że z każdej szkoły można wybrać po jednym uczniu tak, że wszyscy wybrani uczniowie się znają.

7. W konferencji bierze udział $2n$ osób. Każdy uczestnik konferencji ma wśród pozostałych uczestników co najmniej n znajomych. Udowodnij, że wszystkich uczestników konferencji można zakwaterować w pokojach dwuosobowych tak, by każdy uczestnik mieszkał ze swoim znajomym.

Źródło: MIMUW, Staszic, warsztaty w Olsztynie.