Kółko 20.10 - kombinatoryka - zliczanie na chama

Zadanka, bez teorii :) $\mathbb{Z}$ oznacza liczby całkowite, a nie zespolone.

1. Udowodnij, że:
   (a) oblicz sumę wszystkich elementów wszystkich podzbiorów zbioru $\{1, 2, \cdots, n\}$.
   (b) Udowodnij, że jeżeli $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} ... p_k^{a_k}$ jest rokładem na czynniki pierwsze n (czyli $p_k \neq p_j$ dla $k \neq j$, p_k-pierwsza, a_k - całkowite nieujemne), to suma dzielników n wynosi $\frac{p_1^{a_1+1}-1}{p_1-1} \frac{p_1^{a_1+1}-1}{p_k-1} \cdots \frac{p_k^{a_k+1}-1}{p_k-1}$.
   Przy okazji: kto pamięta, że $1 + p + p^2 + \cdots + p^n = \frac{p^{n+1}-1}{p-1}$ dla $p \neq 1$? :P

2. Yogi zawsze pałuje nierówności, przy czym oczywiście popełnia mnóstwo błędów. Próbował on właśnie policzyć $(a_1 + a_2 + \cdots + a_k)^n$ $(k, n \in \mathbb{Z}_+)$. Powiedz mu, ile różnych jednomianów powinien otrzymać. Brzmi to niejasno, więc przykład: $(a_1 + a_2)^2 = a_1^2 + 2a_1a_2 + a_2^2$, więc misio powinien otrzymać 3 jednomiany: a_1^2, a_1a_2, a_2^2. (źródło - Staszic)

3. Oblicz, na ile sposobów można wybrać takie $x_1, x_2, \cdots, x_k$ całkowite nieujemne, że $x_1 + x_2 + \cdots + x_k \leq n$ $(n \in \mathbb{Z}_+)$.

4. Zbiór M jest podzbiorem zbioru $\{1, 2, 3, \cdots, 3n\}$, gdzie n - całkowite, takim, że jeśli $x, y \in M$, to $x - y \neq n$ i $x + y \neq n$. Ile maksymalnie elementów może mieć zbiór M? (źródło - delta)

5. Niech $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ będzie ciągiem liczb naturalnych, a b_i oznacza liczbę elementów ciągu $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$, niemniejszych od i. Wykaż, że $\sum_{k=1}^{n} a_i = \sum_{k=1}^{\infty} b_i$, biorąc pod uwagę, że OI własnie się zaczęła. (źródło - Staszic)

6. Niech p, q będą liczbami całkowitymi dodatnimi, względnie pierwszymi. Wykaż, że $\left[\frac{p}{q}\right] + \left[\frac{2p}{q}\right] + \cdots + \left[\frac{(q-1)p}{q}\right] = \left[\frac{q}{p}\right] + \left[\frac{2q}{p}\right] + \cdots + \left[\frac{(p-1)q}{p}\right]$ (źródło - OM Słowenii)

7. Oblicz, na ile sposobów da się pokryć prostokąt $2 \times n$ $(n \in \mathbb{Z}_+)$ prostokątami 2×1 i 1×2.

8. Dany jest ciąg $nm + 1$ różnych liczb. Wykazać, że podciąg ten zawiera podciąg $n + 1$-elementowy rosnący, lub podciąg $m + 1$-elementowy malejący. (źródło - Zwardoń)

9. (*) Oblicz maksymalną liczbę:
   (a) obszarów, na które dzieli płaszczyznę n prostych,
   (b) obszarów, na które dzieli przestrzeń n płaszczyzn.

   Obszary nieskończone również powinny być policzone. (źródło - nieocenione zadania dra Kuczmy dla pierwszego roku JSIM)