Kółko 26.01.2011 - Nie ma lipy!

Czaskamy zadanka!

Przed treningiem rozgrzewka musi być

1. Na płaszczyźnie danych jest 6 punktów, z których żadne trzy nie leżą na jednej prostej. Łącząc niektóre z tych punktów narysowano 10 odcinków. Wykaż, że w ten sposób uzyskano co najmniej jeden trójkąt.

2. Każdy punkt prostej pomalowano jednym z dwóch kolorów. Wykazać, że istnieją trzy różne punkty jednego koloru, z których jeden jest środkiem odcinka o końcach w dwóch pozostałych punktach.

3. Dane są liczby $1, 2, 3, 4, 5, 6$. Wykonujemy operację polegającą na dodaniu liczby 1 do pewnych dwóch spośród tych liczb. Postępowanie to kontynuujemy. Czy możemy w ten sposób otrzymać ciąg składający się z sześciu równych liczb?

4. Drzewo binarne to drzewo, w którym każdy wierzchołek ma co najwyżej dwóch synów. Regularne drzewo binarne to drzewo, w którym każdy wierzchołek ma 0 lub 2 synów. Głębokością wierzchołka w ukorzenionym drzewie nazwiemy ilość krawędzi na ścieżce między korzeniem drzewa, a tym wierzchołkiem. Liście to wierzchołki, które nie mają synów, a pozostałe wierzchołki to węzły wewnętrzne. Niech X będzie sumą głębokości węzłów wewnętrznych, a Y sumą głębokości liści w regularnym drzewie binarnym o n wierzchołkach. Udowodnić, że $Y = X + n - 1$.

5. Niech waga liścia x o głębokości d drzewa binarnego wyrażona wzorem $w(x) = 2^{-d}$. Udowodnij, że $\sum w(x) \leq 1$, gdzie sumujemy po wszystkich liściach x.

Jedziemy z koksem

1. Na szachownicy 9×9 ustawiono 9 wież w taki sposób, że żadne dwie nie biją się. Następnie każdą wieżę przestawiono na inne pole ruchem konika szachowego. Wykazać, że po tym przestawieniu pewne dwie wieże biją się.

2. W turnieju tenisa stołowego uczestniczyło $2n$ zawodników. Każdy zawodnik rozegrał z każdym innym zawodnikiem co najwyżej jeden mecz. Po turnieju okazało się, że dokładnie n zawodników rozegrało po dwa mecze, a pozostałych n zawodników po trzy mecze. Wyznacz wszystkie liczby całkowite dodatnie n, dla których taka sytuacja jest możliwa.

3. Rozstrzygnąć, czy istnieje 777 kolejnych liczby naturalnych, wśród których znajduje się dokładnie 7 liczb pierwszych.

4. W przestrzeni danych jest takich n punktów ($n \geq 4$), że żadne cztery nie leżą na jednej płaszczyźnie. Każde dwa z tych punktów połączono odcinkiem niebieskim lub czerwonym. Udowodnij, że można tak wybrać jeden z tych kolorów, aby każde dwa punkty były połączone odcinkiem lub łamaną wybranego koloru.

5. Rozstrzygnąć, czy istnieje taki zbiór S złożony z 777 różnych liczb całkowitych dodatnich, że suma liczb dowolnego niepustego podzbioru zbioru S nie jest kwadratem liczby całkowitej.

6. Dana jest tablica rozmiaru $2n \times 2n$, w której $3n$ pól pomalowano na czarno. Wykazać, że można tak wybrać n kolumn oraz n wierszy, by każde czarne pole znalazło się w pewnym wybranym wierszu lub w pewnej wybranej kolumnie.

7. Czy wierzchołki 20–kąta foremnego można tak ponumerować liczbami $1, 2, \ldots, 20$, aby użyć wszystkich tych liczb oraz aby dla każdych czterech kolejnych wierzchołków suma ich numerów była nie większa niż 42? Odpowiedź uzasadnij.

8. Każdą liczbę naturalną pomalowano na jeden z dwóch kolorów. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej n istnieją różne liczby naturalne $a, b > n$ takie, że liczby a, b i $a + b$ są jednego koloru.

9. Każdemu wierzchołkowi 100–kąta foremnego trzeba przyporządkować pewną dodatnią liczbę rzeczywistą. Czy możliwe jest takie przyporządkowanie, w którym każda liczba jest równa wartości bezwzględnej różnicy liczb, które z nią sąsiadują? Odpowiedź uzasadnij.

10. Na niektórych polach kwadratowej planszy o parzystych wymiarach $n \times n$ stoją pionki. Co sekundę jeden z pionków przechodzi na wolne pole sąsiednie. Po pewnym czasie wszystkie pionki znalazły się na swoich wyjściowych pozycjach. Każdy pionek wykonał n^2 ruchów i odwiedził wszystkie pola planszy. Dowieść, ze był moment, w którym żaden pionek nie stał na swoim polu wyjściowym.

11. Dany jest ciąg $n^2 + 1$ liczb. Wykazać, że ciąg ten zawiera podciąg $n + 1$–elementowy niemalejący lub podciąg $n + 1$–elementowy nierosnący.

12. Z n^2 płytek w kształcie trójkąta równobocznego o boku 1 ułożono trójkąt równoboczny o boku n. Każda płytka jest z jednej strony biała, a z drugiej czarna. Ruch polega na wykonaniu następujących czynności: Wybieramy płytkę P mającą wspólne boki z co najmniej dwiema płytkami, których widoczne strony mają kolor inny niż widoczna strona płytki P . Następnie odwracamy płytkę P na drugą stronę. Dla każdego $n \geq 2$ rozstrzygnąć, czy istnieje początkowe ułożenie płytek, pozwalające wykonać nieskończony ciąg ruchów.

13. Szachownicą $n \times n$ wypełniono liczbami rzeczywistymi z przedziału $\langle -1, 1 \rangle$. Suma liczb w każdym kwadracie 2×2 jest zerem. Udowodnić, że suma wszystkich liczb na szachownicy nie przekracza n.

14. Liczby $1, 2, ..., 9$ napisano na osobnych kartkach. Gracze na przemian zabierają sobie po jednej z nich. Wygrywa ten, kto jako pierwszy skompletuje trzy kartki o sumie liczby równej 15. Gracz rozpoczynający wybrał kartkę z liczbą 2. Jaki ruch powinien wykonać drugi gracz. Czy któryś z zawodników ma strategię wygrywającą? Jeśli tak, to który?