Nierówność Jensena dla x^α

kółko I LO Białystok

13 grudnia 2013

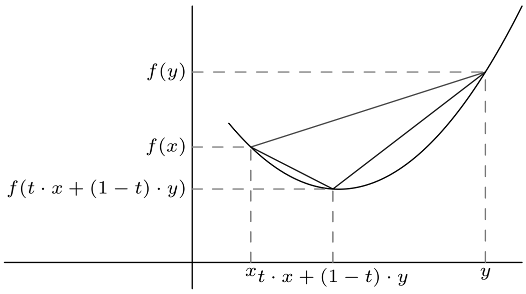
Zdecydowana większość materiału jest bezczelnie zerżnięta z wykładu Oli Baranowskiej z Proserw 2011, zachęcam do porównania. Inne możliwe źródła to `matma.ilo.pl`*, czy google — jest sporo wyników z zadaniami.*

Definicja 1.

Funkcja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *jest* wypukła *wtedy i tylko wtedy, gdy dla wszystkich* $x, y \in [a, b]$ *i dowolnej liczby* $t \in [0, 1]$ *zachodzi nierówność:*

$$f(tx + (1 - t)y) \leqslant tf(x) + (1 - t)f(y).$$

Gdy nierówność zachodzi w drugą stronę, funkcja jest wklęsła*.*



Nas w zasadzie odchodzi jedynie wniosek:

Wniosek 2. *Niech* α *będzie ustaloną liczbą rzeczywistą. Jeżeli* $\alpha > 1$ *lub* $\alpha < 0$ *to funkcja* $f(x) = x^\alpha$ *jest wypukła. Jeżeli* $\alpha \in (0, 1)$*, to funkcja ta jest wklęsła.*

Na przykład funkcja x^2 jest wypukła, zaś funkcja $\sqrt{x}$ jest wklęsła.

Ogólnie, jeżeli istnieje druga pochodna funkcji f, to f jest wypukła na $[a, b]$ wtedy i tylko wtedy, gdy druga pochodna jest nieujemna na $[a, b]$. Podobnie f jest wklęsła, jeżeli druga pochodna f jest niedodatnia.

Twierdzenie 3 (nierówność Jensena)**.** *Niech* $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ *będzie funkcją wypukłą. Jeżeli liczby* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *są dodatnie, zaś liczby* nieujemne $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ *sumują się do 1, to zachodzi*

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n) \leqslant \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + \ldots + \alpha_n f(x_n)$$

Jeśli funkcja jest wklęsła, nierówność zachodzi w drugą stronę.

Liczby $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ nazywamy *wagami*, najczęściej używamy wag $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 1/n$ lub wag $\alpha_1 = x_1/(x_1 + \ldots + x_n), \alpha_2 = x_2/(x_1 + \ldots + x_n), \ldots, \alpha_n = x_n(x_1 + \ldots + x_n)$.

Zadanie 1

Wykaż, że dla dowolnych a, b, c dodatnich zachodzi

$$3a^2 + 3b^2 + 3c^2 \geqslant (a + b + c)^2.$$

Zadanie 2

Dowiedź, że jeśli a, b, c są dodatnie i sumują się do 1, to

$$a^3 + b^3 + c^3 \geqslant (a^2 + b^2 + c^2)^2.$$

Zadanie 3

Niech $x_1, \ldots, x_n$ będą dodatnimi liczbami rzeczywistymi.

1. Udowodnij, że zachodzi tzw. nierówność pomiędzy średnią arytmetyczną i kwadratową

$$\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} \leqslant \sqrt{\frac{x_1^2 + \ldots + x_n^2}{n}}.$$

2. Udowodnij, że zachodzi tzw. nierówność pomiędzy średnią kwadratową i sześcienną, tzn.

$$\sqrt{\frac{x_1^2 + \ldots + x_n^2}{n}} \leqslant \sqrt[3]{\frac{x_1^3 + \ldots + x_n^3}{n}}.$$

Zadanie 4
Udowodnij nierówność

$$\sqrt[3]{3+\sqrt[3]{3}}+\sqrt[3]{3-\sqrt[3]{3}} \leqslant 2\sqrt[3]{3}.$$

Zadanie 5
Wykaż, że dla dowolnych x, y, z dodatnich zachodzi

$$x\sqrt{y+z}+y\sqrt{x+z}+z\sqrt{x+y} \leqslant \sqrt{2(x+y+z)(xy+yz+zx)}.$$

1.1 *Nierówność Jensena dla funkcji innych niż x^α.

Zadanie 6
Pokaż, że dla $x, y, z \in \mathbb{R}_+$ takich, że $x+y+z=1$ zachodzi

$$\frac{3x+1}{x+1}+\frac{3y+1}{y+1}+\frac{3z+1}{z+1} \leqslant \frac{9}{2}.$$

Zadanie 7
Pokaż, że jeśli a, b, c są liczbami dodatnimi sumującymi się do 1, to zachodzi

$$\sqrt{(b+c)(2a+b+c)}+\sqrt{(a+c)(a+2b+c)}+\sqrt{(a+b)(a+b+2c)} \leqslant 2\sqrt{2}.$$