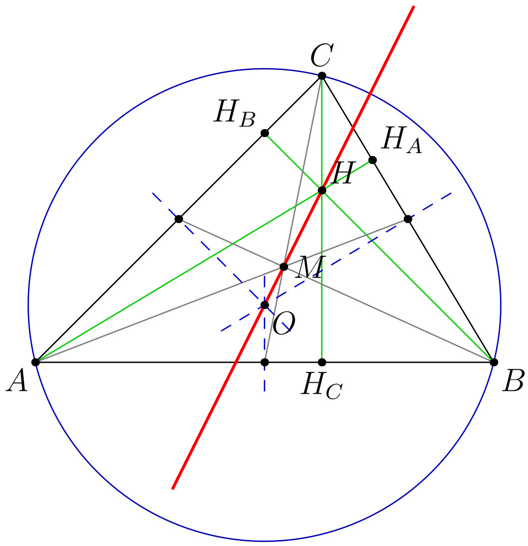

Jednokładność

Teoria

1. **Definicja 1.1** *Jednokładnością o skali k względem O (który nazywamy środkiem jednokładności) nazywamy przekształcenie płaszczyzny które każdemu punktowi A przyporządkowuje punkt A', taki, że:*

   - *A, O, A' - na jednej prostej*
   - $|OA'| = |k||OA|$
   - *Jeżeli $k < 0$ to A, A' leżą po różnych stronach O, a jeżeli $k > 0$, to po jednej.*

   Strasznie formalnie wyszło... Alternatywna definicja: Jednokładność jaka jest, każdy widzi. Najlepiej myśleć o jednokładności jako o takim upgradowanym podobieństwie, ale ono jest mocno upgradowane, jak Zergling na III poziomie w porównaniu do tego z I w sc.

2. Jednokładność przenosi proste na proste, odcinki na odcinki, okręgi na okręgi. Mnoży przez $|k|$ długości. Zachowuje kąty i przenosi punkty przecięcia na punkty przecięcia. Przenosi równoległe na równoległe. Z grubsza zachowuje całą geometrię sytuacji.

3. **Metatwierdzenie 1.1** *Jednokładność zachowuje wszystkie sensowne konstrukcje: przenosi styczne na styczne, środki okręgów opisanych na środki okręgów opisanych, ortocentra na ortocentra itp.*

4. *Tylko informacyjnie. Dla głębszych rozważań polecam stare kółka.*

   Złożenie dwóch jednokładności o skalach α, β jest:

   - Jednokładnością o skali $\alpha\beta$, jeżeli $\alpha\beta \neq 1$
   - Translacją (tj. przesunięciem o wektor), jeżeli $\alpha\beta = 1$ (można na to patrzeć jak na jednokładność o nieskończonym środku)

1.1 Zadania

1. Okrąg wpisany w $\triangle ABC$ jest styczny do AB w punkcie E. Niech EF będzie średnicą tego okręgu. Okrąg dopisany do boku AB trójkąta ABC jest styczny do tego boku w G. Udowodnić, że punkty C, F, G są współliniowe.

2. Okręgi O_1 i O_2 są styczne wewnętrznie w punkcie P (O_2 ma mniejszy promień od O_1). Cięciwa AB okręgu O_1 jest styczna do okręgu O_2 w M. Udowodnić, że PM jest dwusieczną kąta $\angle APB$.

3. **Twierdzenie 1.2 (prosta Eulera)** *Udowodnić, że w trójkącie nierównobocznym ABC środek ciężkości M, ortocentrum H i środek okręgu opisanego O leżą na jednej prostej.*

(a) *Rozważyć środki A', B', C' boków BC, CA, AB. Udowodnić, że środek okręgu opisanego na ABC to ortocentrum $A'B'C'$.*

(b) *Udowodnić, że środki ciężkości $\triangle A'B'C'$ i $\triangle ABC$ pokrywają się.*

(c) *udowodnić twierdzenie, stosując odpowiednią jednokładność.*

(d) *znaleźć stosunek OM/HM.*

4. **Twierdzenie 1.3 (okrąg Feuerbacha, dziewięciu punktów)** *Niech H i O oznaczają ortocentrum i środek okręgu opisanego na trójkącie nierównobocznym ABC. Udowodnić, że*

   (a) *istnieje okrąg przechodzący przez środki boków i spodki wysokości ABC (łącznie 6 punktów),*

   (b) *środek F tego okręgu leży na prostej Eulera (prostej HO), jaki jest stosunek FO/HO?*

   (c) *okrąg ten przechodzi również przez środku odcinków łączących wierzchołki z ortocentrum (+3 punkty).*

   Jeden z piękniejszych dowodów wykorzystuje odbicia ortocentrum względem boków.

1.2 Pompowanie

Zadania ze zbiorku dra Pompe (na stronie), których dowody każdy na 2. etapie powinien pamiętać (i same fakty także ◡̈):

9	15	16	17	18	33	34	50	63

1.3 Jedna stereometria na pocieszenie

ZADANIE
Sfera wpisana w czworościan $ABCD$ jest styczna do ścian ABC i BCD odpowiednio w punktach P i Q. Dowieść, że $\angle APB = \angle CQD$.

Źródło: Wykłady M. Kiezy