Ferie, a my nadal chodzimy do szkoły :) (Jednokładność)

Teoria

1. Jednokładnością o skali k względem O (który nazywamy środkiem jednokładności) nazywamy przekształcenie płaszczyzny które każdemu punktowi A przyporządkowuje punkt A', taki, że:
   - A, O, A' - na jednej prostej
   - $|OA'| = |k||OA|$
   - Jeżeli $k < 0$ to A, A' leżą po różnych stronach O, a jeżeli $k > 0$, to po jednej.

   Strasznie formalnie wyszło... Alternatywna definicja: Jednokładność jaka jest, każdy widzi.
2. Jednokładność przenosi odcinki na odcinki, trójkąty na trójkąty, punkty szczególne, takie jak np. środek okręgu na punkty szczególne (nowych trójkątów), okręgi na okręgi.
3. Jednokładność zachowuje punkty przecięcia, czyli przenosi np. okręgi styczne na styczne, proste równoległe na równoległe (nawet na równoległe do prostych przed jednokładnością).
4. Złożenie dwóch jednokładności o skalach α, β jest:
   - Jednokładnością o skali $\alpha\beta$, jeżeli $\alpha\beta \neq 1$
   - Translacją, jeżeli $\alpha\beta = 1$ (można na to patrzeć jak na jednokładność o nieskończonym środku)

Zadania

1. Udowodnić, że w trójkącie ABC środek ciężkości, ortocentrum i środek okręgu opisanego leżą na jednej prostej (prostej Eulera).
   Rozwiązanie:
   Niech M oznacza środek ciężkości, H ortocentrum, a O środek okręgu opisanego.
   Zauważmy najpierw, że O pokrywa się z ortocentrum trójkąta DEF, gdzie D, E, F to środki boków BC, CA, AB odpowiednio (dowód z zadaniach przygotowawczych do OMa 2008, 2. seria).
   Wiemy, że trzy środkowe AD, BE, CF w trójkącie ABC przecinają się w środku ciężkości M i jest

   $$\frac{AM}{DM} = 2, \frac{BM}{EM} = 2, \frac{CM}{FM} = 2$$

   Niech J oznacza jednokładność o środku w M i skali $-\frac{1}{2}$. Z powyższych równości wynika, że

   $$J(A) = D, J(B) = E, J(C) = F$$

   Stąd J przenosi $\triangle ABC$ na $\triangle DEF$, więc, jakoże jednokładność zachowuje punkty szczególne trójkąta, przenosi ona ortocentrum H trójkąta ABC, na ortocentrum DEF, czyli na O:

   $$J(H) = O$$

   To już dowodzi, że H, M, O są współliniowe, gdyż punkt, środek jednokładności i obraz punktu są zawsze współliniowe.
2. Okrąg wpisany w $\triangle ABC$ jest styczny do AB w punkcie E. Niech EF będzie średnicą tego okręgu. Okrąg dopisany do boku AB trójkąta ABC jest styczny do tego boku w G. Udowodnić, że punkty C, F, G są współliniowe.
   Rozwiązanie:

Niech o_1 oznacza okrąg wpisany w $\triangle ABC$, a o_2 okrąg dopisany do boku AB. Niech J będzie jednokładnością o środku w C, która przekształca o_2 w o_1 (jednokładność taka zawsze istnieje, wystarczy wziąć jednokładność, która przekształca środek na środek) i niech $G' = J(G)$. Chcemy wykazać, że $G' = F$.
Jednokładność zachowuje równoległość prostych, więc prosta l styczna do o_1 w G' jest równoległa do prostej stycznej do o_2 w G, czyli do prostej AB. Nie może być, $l = AB$, gdyż AB jest styczną do o_2 bliższą C, więc przechodzi na styczną do o_1 bliższą C (trochę to nieformalnie w tym miejscu). Prosta l jest więc styczną do o_1 w G' równoległą do AB i inną niż AB. Z tego już wynika, że prosta łącząca punkty styczności AB i l do o_1 jest średnicą o_1 (o jednym końcu w E), czyli $G' = F$ (wynika to z konstrukcji F).
Stąd już wynika, że $C, J(G) = F, G$ są współliniowe, jako środek jednokładności, punkt i obraz punktu.

3. Okręgi O_1 i O_2 są styczne wewnętrznie w punkcie B. Średnica AC okręgu O_1 jest styczna do okręgu O_2 w M. Udowodnić, że BM jest dwusieczną kąta $\angle ABC$.
   Rozwiązanie:
   Niech C_2 będzie środkiem okręgu O_2. Rozważmy jednokładność J o środku w B, przenoszącą O_1 na O_2. Niech $A' = J(A), C' = J(C)$. Z własności jednokładności $A'C'$ jest średnicą O_2 oraz $A'C'||AC$. Ponadto $AC \perp MC_2$, bowiem AC jest styczną. Stąd $A'C' \perp MC_2$, co w połączeniu z $|A'C_2| = |C'C_2|$ implikuje $|MA'| = |MC'|$.
   Punkt M jest więc środkiem łuku $A'C'$ okręgu opisanego na $A'BC'$, a przez ten punkt przechodzi dwusieczna, co było udowadniane wcześniej, więc prosta BM jest dwusieczną kąta $A'BC'$, a więc i ABC.

4. (de facto Tales) Punkt P leży wewnątrz czworokąta wypukłego $ABCD$. Udowodnić, że:

   (a) Środki boków tego czworokąta tworzą równoległobok.
   Rozwiązanie:
   Niech E, F, G, H będą środkami boków AB, BC, CD, DA odpowiednio. Z twierdzenia Talesa dla kątów o wierzchołkach B, D jest:
   $$EF||AC, \frac{|EF|}{|AC|} = \frac{1}{2}$$
   $$GH||AC, \frac{|GH|}{|AC|} = \frac{1}{2}$$
   Stąd $EF||GH$ i $|EF| = |GH|$, czyli $EFGH$ jest równoległobokiem.

   (b) Środki ciężkości trójkątów ABP, BCP, CDP, DAP tworzą równoległobok.
   Rozwiązanie:
   Jednokładność J środku w P i skali $\frac{2}{3}$ przenosi środki boków na środki ciężkości odpowiednich trójkątów, wynika to z faktu, że środkowe przecinają się w stosunku $2:1$. Oczywiście jednokładność przenosi równoległobok na równoległobok.

   (c) Policzyć pola tych równoległoboków.
   Rozwiązanie:
   Pole pierwszego równoległoboku wynosi $\frac{1}{2}P_{ABCD}$, można to policzyć licząc pola trójkątów, które zostaną po obcięciu. Pole drugiego równoległoboku wynosi więc $(\frac{2}{3})^2\frac{1}{2}P_{ABCD} = \frac{2}{9}P_{ABCD}$, z własności jednokładności.

5. Dany jest sześciokąt $ABCDEF$. Wykazać, że środki ciężkości trójkątów ABC, BCD, CDE, DEF, EFA, FAB tworzą sześciokąt, w którym przeciwległe boki są równoległe i równe.
   Rozwiązanie:
   Zauważmy, że para przeciwległych boków to np. środki ciężkości trójkątów: ABC, BCD i DEF, EFA. Niech M_1, M_2, M_3, M_4 oznaczają środki ciężkości ABC, BCD, DEF, EFA odpowiednio oraz niech G_1 oznacza środek boku BC, G_2 środek boku EF. Jednokładność względem G_1 o skali 3 przekształca M_1M_2 w AD, więc
   $$M_1M_2||AD, \frac{|M_1M_2|}{|AD|} = \frac{1}{3}$$

Podobnie jednokładność względem G_2 o skali 3 przekształca M_3M_4 na AD, stąd

$$M_3M_4||AD, \frac{|M_3M_4|}{|AD|} = \frac{1}{3}$$

Z tych dwóch zależności już wynika teza dla tych boków. Dla pozostałych boków rozumujemy analogicznie.

6. (*) Okręgi o_1, o_2 o równych promieniach są styczne wewnętrznie do okręgu o w punktach A, B odpowiednio. Punkt P należy do okręgu o. Proste PA, PB przecinają okręgi o_1, o_2 w C, D. Udowodnić, że $CD||AB$.
   Rozwiązanie:
   Niech J_{o_2o} będzie jednokładnością względem B przenoszącą o_2 na o, a J_{oo_1} jednokładnością o środku w A przenoszącą o na o_1 oraz niech $J = J_{oo_1} \circ J_{o_2o} = J_{oo_1}(J_{o_2o})$. Złożenie to przenosi punkt D na C, gdyż $J_{o_2o}(D) = P$, $J_{oo_1}(P) = C$ oraz przenosi punkty A, B na punkty leżące na prostej AB, gdyż, np. dla B $J_{o_2o}(B) = B$, więc $J(B) = J_{oo_1}(B)$, a $B, J_{oo_1}(B), A$ są współliniowe.
   Stąd J przenosi prostą AB na samą siebie.
   Policzmy, jaki jest iloczyn skal jednokładności J_{o_2o}, J_{oo_1}. Niech O_1, O_2, O będą środkami, zaś $r_1, r_2 = r_1, r$ promieniami o_1, o_2, o odpowiednio. Mamy

$$J_{o_2o}(O_2) = O, J_{o_2o}(B) = B \text{ skala wynosi: } \frac{|BO|}{|BO_2|} = \frac{r}{r_2}$$

   Analogicznie wnioskujemy, że skala J_{oo_1} wynosi $\frac{r_1}{r} = \frac{r_2}{r}$. Iloczyn skal wynosi 1, więc J, jako złożenie jest translacją. Liczymy tylko wartość bezwzględną, bo bezpośrednio widać, że obie skale są dodatnie.
   Skoro $J(D) = C$, to $J = T_{\vec{DC}}$ (translacja o wektor DC), a skoro $J(AB) = AB$, to $CD||AB$.

7. (*) Okręgi O_1 i O_2 są wpisane w kąt o wierzchołku P. Ponadto są one wpisane w kąty wierzchołkowe o wierzchołku Q. Niech R - punkt na O_1. Niech proste RP i RQ przecinają O_2 w 4 punktach. Udowodnić, że pewne 2 z tych punktów są średnicą O_2.
   Rozwiązanie:
   Niech J_Q będzie jednokładnością względem Q przenoszącą O_1 na O_2 i niech J_P będzie jednokładnością względem P przenoszącą O_1 na O_2. Niech $A = J_Q(R), B = J_P(R)$. Wtedy A, B należą do zbioru punktów przecięcia RP, RQ z O_2. Pozostaje wykazać, że AB jest średnicą O_2.
   Niewątpliwie $J_P \neq J_Q$, a więc $A \neq B$ (środek, punkt, obraz jednego punktu już definiuje jednokładność). Niech styczna do O_2 w A nazywa się a, a w B - b, a do O_1 w R - r. Z własności jednokładności mamy $a||r$ i $b||r$. Ponadto $a \neq b$. Stąd już wynika, jak w zadaniu drugim, że AB to średnica.

8. Wszystkie zadania z kółka ze staszica. Dzięki Ci Ula!

Parę dodatkowych prostych zadań

1. Dany jest trójkąt ABC, w którym $\angle ACB = 45$. Udowodnić, że $|CH| = |AB|$, gdzie H - ortocentrum ABC.

2. Punkty D, E, F leżą na bokach BC, CA, AB trójkąta ABC odpowiednio. Proste AD, BE, CF przecinają się w P. Wykazać, że jeżeli w czworokąty $AEPF$ i $BFPD$ można wpisać okręgi, to można wpisać okrąg i w czworokąt $CEPD$.
   Wskazówka: Załóżmy, że mamy czworokąt wypukły $ABCD$ oraz, że półproste AB i DC przecinają się w E, a półproste AD i BC w F. Wtedy w czworokąt $ABCD$ można wpisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy $AE + CF = AF + CE$.

3. Punkty E, F leżą na bokach BC, AD równoległoboku $ABCD$, przy czym $|BE| = |DF|$. Punkt K leży na boku CD. Odcinek EF przecina odcinki AK, BK w punktach P, Q. Udowodnić, że $P(AFP) + P(BEQ) = P(KPQ)$, gdzie $P(X)$ - pole figury X.

4. Zadania ze skryptu p. Pompe.

5. Wszelkie uwagi i błędy proszę zgłaszać.