Ferie, a my nadal chodzimy do szkoły :) (Jednokładność)

Teoria

1. Jednokładnością o skali k względem O (który nazywamy środkiem jednokładności) nazywamy przekształcenie płaszczyzny które każdemu punktowi A przyporządkowuje punkt A', taki, że:
   - A, O, A' - na jednej prostej
   - $|OA'| = |k||OA|$
   - Jeżeli $k < 0$ to A, A' leżą po różnych stronach O, a jeżeli $k > 0$, to po jednej.

   Strasznie formalnie wyszło... Alternatywna definicja: Jednokładność jaka jest, każdy widzi.

2. Jednokładność przenosi odcinki na odcinki, trójkąty na trójkąty, punkty szczególne, takie jak np. środek okręgu na punkty szczególne (nowych trójkątów), okręgi na okręgi.

3. Jednokładność zachowuje punkty przecięcia, czyli przenosi np. okręgi styczne na styczne, proste równoległe na równoległe (nawet na równoległe do prostych przed jednokładnością).

4. Złożenie dwóch jednokładności o skalach α, β jest:
   - Jednokładnością o skali $\alpha\beta$, jeżeli $\alpha\beta \neq 1$
   - Translacją, jeżeli $\alpha\beta = 1$ (można na to patrzeć jak na jednokładność o nieskończonym środku)

Zadania

1. Udowodnić, że w trójkącie ABC środek ciężkości, ortocentrum i środek okręgu opisanego leżą na jednej prostej (prostej Eulera).

2. Okrąg wpisany w $\triangle ABC$ jest styczny do AB w punkcie E. Niech EF będzie średnicą tego okręgu. Okrąg dopisany do boku AB trójkąta ABC jest styczny do tego boku w G. Udowodnić, że punkty C, F, G są współliniowe.

3. Okręgi O_1 i O_2 są styczne wewnętrznie w punkcie B. Średnica AC okręgu O_1 jest styczna do okręgu O_2 w M. Udowodnić, że BM jest dwusieczną kąta $\angle ABC$.

4. (de facto Tales) Punkt P leży wewnątrz czrowokąta wypukłego $ABCD$. Udowodnić, że:
   (a) Środki boków tego czworokąta tworzą równoległobok.
   (b) Środki ciężkości trójkątów ABP, BCP, CDP, DAP tworzą równoległobok.
   (c) Policzyć pola tych równoległoboków.

5. Dany jest sześciokąt $ABCDEF$. Wykazać, że środki ciężkości trójkątów ABC, BCD, CDE, DEF, EFA, FAB tworzą sześciokąt, w którym przeciwległe boki są równoległe i równe.

6. (*) Okręgi o_1, o_2 o równych promieniach są styczne wewnętrznie do okręgu o w punktach A, B odpowiednio. Punkt P należy do okręgu o. Proste PA, PB przecinają okręgi o_1, o_2 w C, D. Udowodnić, że $CD||AB$.

7. (*) Okręgi O_1 i O_2 są wpisane w kąt o wierzchołku P. Ponadto są one wpisane w kąty wierzchołkowe o wierzchołku Q. Niech R - punkt na O_1. Niech proste RP i RQ przecinają O_2 w 4 punktach. Udowodnić, że pewne 2 z tych punktów są średnicą O_2.

8. Wszystkie zadania z kółka ze staszica. Dzięki Ci Ula!

Parę dodatkowych prostych zadań

1. Dany jest trójkąt ABC, w którym $\angle ACB = 45$. Udowodnić, że $|CH| = |AB|$, gdzie H - ortocentrum ABC.

2. Punkty D, E, F leżą na bokach BC, CA, AB trójkąta ABC odpowiednio. Proste AD, BE, CF przecinają się w P. Wykazać, że jeżeli w czworokąty $AEPF$ i $BFPD$ można wpisać okręgi, to można je wpisać i w czworokąt $CEPD$.

3. Punkty E, F leżą na bokach BC, AD równoległoboku $ABCD$, przy czym $|BE| = |DF|$. Punkt K leży na boku CD. Odcinek EF przecina odcinki AK, BK w punktach P, Q. Udowodnić, że $P(AFP) + P(BEQ) = P(KPQ)$, gdzie $P(X)$ - pole figury X.

4. Zadania ze skryptu p. Pompe.

5. Wszelkie uwagi i błędy proszę zgłaszać.