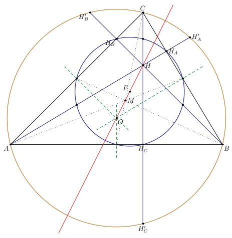

Jednokładność

Radosnych Święt!

kółko I LO Białystok

19 grudnia 2012

Poniższe kółko w znacznej mierze jest wzięte z poprzedniego kółka o jednokładności, rozwiązania do większości zadań można znaleźć na `http://matma.ilo.pl/images/jedn260109r.pdf`

Definicja 1. *Jednokładnością o skali k ($k \neq 0$) względem punktu O (który nazywamy środkiem jednokładności) nazywamy przekształcenie płaszczyzny (lub przestrzeni) które każdemu punktowi A przyporządkowuje punkt A', taki, że:*

1. *punkty A, O, A' są współliniowe,*
2. $|OA'| = |k| \cdot |OA|$,
3. *jeżeli $k < 0$ to A, A' leżą po różnych stronach O, a jeżeli $k > 0$, to po tej samej.*

Jednokładnością o skali -1 jest po prostu symetria względem O. Jeżeli ktoś lubi wektory, to może przeformułować definicję w języku wektorów — z grubsza jest to mnożenie przez k wektora pomiędzy punktem a O.

Własności jednokładności

1. Jednokładność przenosi proste na proste i zachowuje kąty pomiędzy prostymi, w szczególności przenosi proste równoległe na równoległe,
2. Jednokładność przenosi odcinek na odcinek $|k|$ razy dłuższy, więc zachowuje stosunki odcinków,
3. Z 2 wynika, że jednokładność przenosi okręgi na okręgi.
4. Z poprzednich punktów wynika też, że jeżeli jednokładność przenosi trójkąt $\mathcal{A}$ na $\mathcal{B}$, to przenosi środek okręgu $\mathcal{A}$ na środek okręgu $\mathcal{B}$, ortocentrum $\mathcal{A}$ na ortocentrum $\mathcal{B}$ itd. Z grubsza zachowuje całą sytuację geometryczną.
5. Jednokładność czasem pozwala udowodnić przedziwne rzeczy w sposób prosty. Warto o niej pamiętać np. jeżeli mamy dwa okręgi styczne.

Zadania bez jednokładności.

Zadanie 1

Udowodnij, że środek okręgu opisanego na trójkącie ABC jest ortocentrum trójkąta $A'B'C'$ utworzonego przez środki boków $\triangle ABC$.

Zadanie 2

Pokaż, że środki ciężkości trójkąta ABC i trójkąta utworzonego przez środki boków $\triangle ABC$ pokrywają się.

Zadania $\neg$bez jednokładności.

Zadanie 3

Punkt P leży wewnątrz czworokąta wypukłego $ABCD$. Dowiedź, że

1. środki boków $ABCD$ tworzą równoległobok.
2. środki ciężkości trójkątów $\triangle ABP, \triangle BCP, \triangle CDP, \triangle DAP$ tworzą równoległobok.

Zadanie 4

Okrąg wpisany w $\triangle ABC$ jest styczny do AB w punkcie E, a odcinek EF jest średnicą tego okręgu. Okrąg dopisany do boku AB trójkąta ABC jest styczny do tego boku w G. Wykaż, że punkty C, F, G są współliniowe.

Zadanie 5
Okręgi O_1 i O_2 są styczne wewnętrznie w punkcie P (O_2 ma mniejszy promień od O_1). Cięciwa AB okręgu O_1 jest styczna do okręgu O_2 w M. Uzasadnij, że PM jest dwusieczną kąta $\sphericalangle APB$.

Zadanie 6 prosta Eulera
Wykaż, że w trójkącie ABC środek ciężkości M, ortocentrum H i środek okręgu opisanego O leżą na jednej prostej. Przy założeniu, że $\triangle ABC$ nie jest równoboczny udowodnij, że $H \neq M$ i znajdź stosunek OM/HM.

Zadanie 7 okrąg Feuerbacha, dziewięciu punktów
Niech H i O oznaczają ortocentrum i środek okręgu opisanego na trójkącie ABC. Udowodnij, że istnieje okrąg przechodzący przez środki boków $\triangle ABC$, spodki wysokości w trójkącie ABC i środki odcinków łączących wierzchołki z H.

Okrąg ten nazywa się okręgiem Feuerbacha.

Zadanie 8
Dany jest sześciokąt $ABCDEF$. Wykazać, że środki ciężkości trójkątów ABC, BCD, CDE, DEF, EFA i FAB tworzą sześciokąt, w którym przeciwległe boki są równoległe i równe.