Przekręty płaszczyzny

Teoria

1. **Definicja** *Kątem skierowanym $\angle ABC = \angle(AB, BC)$ będziemy nazywać miarę kąta o jaki trzeba przekręcić płaszczyznę wokół B tak, by* **półprosta** *BA przeszła na półprostą BC. Taki kąt jest dokładnie jeden z dokładnością do $360°$ i z tą dokładnością będziemy mierzyć. Ponadto, dla uzupełnienia definicji miary kąta skierowanego, zakładamy, że miara ta nie zmienia się przy przesunięciu o wektor i obrocie.*

   Oczywiście jeżeli przekręcimy półprostą BA na BC, a później półprostą BC na BA, to otrzymujemy obrót przenoszący półprostą BA na BA, czyli obrót o $0°$. Stąd wynika dziwna równość

   $$\angle CBA = -\angle ABC$$

   w przeciwieństwie do zwykłych kątów, gdzie mamy $ABC = CBA$. Zwykle przyjmuje się, że kręcimy przeciwnie do wskazówek zegara, czyli kąt $\angle(XO, OY) = 90°$ (OX, OY, to osie układu współrzędnych, $X = (0,1), Y = (1,0)$).

2. W zdaniu „miara kąta nie zmienia się w przesunięciu o wektor i obrocie" chodzi o to, że jeżeli mamy przekształcenie J które jest obrotem lub przesunięciem o wektor, to mamy $\angle(AB, BC) = \angle(J(AB), J(BC))$, gdzie $J(AB)$ to półprosta otrzymana po przekształceniu półprostej AB. Zauważmy, że zwykła miara kąta nie zmienia się przy przesunięciu, obrocie i symetrii względem prostej. Inaczej jest z kątami skierowanymi.

   Lemat *Kąt skierowany zmienia znak w symetrii względem prostej.*

   Dowód: Weźmy dowolny kąt $\angle ABC$. Można założyć, że mamy policzyć jego miarę w symetrii względem dwusiecznej l tego kąta skierowanego (która jest zdefiniowana tak samo, jak dwusieczna zwykłego kąta), bowiem w innym przypadku możemy tak przesuwać i obracać kąt (nie zmieniając miary), że prosta, względem której robimy symetrię, stanie się tą dwusieczną.
   W symetrii względem prostej l półprosta BA przechodzi na BC, a BC przechodzi na BA, więc $\angle ABC$ w tej symetrii przechodzi na $\angle CBA$, bowiem obrót o α przenosi BA na BC, więc po symetrii przenosi on BC na BA. Stąd kąt $\angle ABC$ zmienia się w $\angle CBA = -\angle ABC$.
   Jeżeli S jest symetrią względem prostej, to przenosi ona kąt skierowany na kąt symetryczny do niego: $S(\angle ABC) = \angle S(A)S(B)S(C)$. Stąd wynika $\angle S(A)S(B)S(C) = -\angle ABC$, czyli

   $$\angle S(C)S(B)S(A) = \angle ABC$$

3. Można zrezygnować z warunku, że odpowiednie półproste przechodzą na siebie i rozważać kąty z dokładnością do $180°$, ale wtedy obrót o $180°$ jest nie do odróżnienia od obrotu o $0°$, a zwykle są to jednak dwa różne przeształcenia, więc **nie** będziemy rezygnować z tego warunku.

4. W kątach skierowanych kąty wierzchołkowe i naprzemianległe (zgodnie skierowane) są równe, bowiem można odpowiednio obrócić i przesunąć. Mamy również zawsze

   $$\angle BAC + \angle CAD = \angle BAD$$

Dowód: obrót o $\angle BAC$ przenosi półprostą AB na AC, a obrót o kąt $\angle CAD$ przenosi półprostą AC na półprostą AD, stąd obrót o kąt $\angle BAC + \angle CAD$ przenosi AB na AD, czyli z definicji $\angle BAC + \angle CAD = \angle BAD$ (było tutaj milczące założenie, że obrót wokół A o $\alpha + \beta$ to złożenie obrotu wokół A o α i obrotu wokół A o β).

Możemy więc spokojnie dodawać kąty skierowane, czego raczej nie mogliśmy robić ze zwykłymi kątami (przypadek, gdy D leży wewnątrz kąta $\angle BAC$). Ta równość jest główną przewagą kątów skierowanych nad zwykłymi. Możemy z niej wywnioskować, że $\angle CBA = -\angle ABC$, bowiem z definicji $\angle BAB = 0°$.

5. Suma kątów zgodnie skierowanych trójkąta $\triangle ABC$ wynosi $180°$, innymi słowy:

$$\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB = 180°$$

Dowód: Niech D będzie obrazem A w przesunięciu o wektor $\vec{BC}$. Wtedy $\angle ABC = \angle DCX$, gdzie X leży daleeko na półprostej BC. Z równości kątów naprzemianległych otrzymujemy $\angle CAB = \angle ACD$, więc

$$\angle ABC+\angle BCA+\angle CAB = \angle DCX+\angle BCA+\angle ACD = \angle BCA+\angle ACD+\angle DCX = \angle BCX = 180°$$

Ostatnia równość wprost z definicji.

6. Najprościej jest myśleć o kątach skierowanych, jak o zwykłych kątach ze sztucznie dodanym zwrotem (kąty lewoskrętne i prawoskrętne) i sztucznie określonymi regułami: kąty o tym samym zwrocie dodajemy, a o przeciwnych odejmujemy.

7. **Definicja** *Obrotem o kąt skierowany $\alpha = \angle(BA, AC)$ wokół A nazywamy obrót wokół A, który półprostą AB przenosi na półprostą AC i piszemy O_A^α. A nazywamy środkiem obrotu. Zauważmy, że jeżeli obrót nie jest o kąt $0°$, to jedynym punktem, który po obrocie zostaje niezmieniony jest A.*

8. **Lemat** *Obrót O_A^α da się zapisać jako złożenie symetrii względem prostej BA z symetrią względem prostej AC (najpierw odbijamy względem BA) dla których jest $\angle(BA, AC) = \frac{\alpha}{2}$, co zapisujemy jako $O_A^\alpha = S_{AC} \circ S_{BA}$.*

   Dowód: Weźmy dowolne proste AB i AC, takie, że kąt skierowany pomiędzy BA a AC to $\frac{\alpha}{2}$. Wtedy $\angle BAC = \frac{\alpha}{2}$ lub $\angle BAC = \frac{\alpha}{2} + 180°$, tak czy inaczej $2\angle BAC = \alpha$.
   Weźmy dowolne $X \neq A$. Niech X' oznacza X odbity w symetrii względem BA, a X'' oznacza X' odbity w symetrii względem AC. Wtedy $\angle XAB = \angle BAX'$ i $\angle X'AC = \angle CAX''$, stąd $\angle XAX'' = \angle XAB + \angle BAX' + \angle X'AC + \angle CAX'' = 2(\angle BAX' + \angle X'AC) = 2\angle BAC = \alpha$.
   Zauważmy, że korzystaliśmy w tych równościach z $\angle BAC + \angle CAD = \angle BAD$ i $\angle S(C)S(B)S(A) = \angle ABC$ i dzięki temu nie musieliśmy rozważać niezliczonych przypadków.

9. **Twierdzenie** *Złożenie obrotów O_A^α i O_B^β (najpierw obrót wokół A), czyli $O_B^\beta \circ O_A^\alpha$ (składamy od prawej) jest*

   (a) Obrotem o kąt $\alpha + \beta$ wokół X takiego, że $\angle XAB = \frac{\alpha}{2}$ i $\angle XBA = -\frac{\beta}{2}$ jeśli $\alpha + \beta \neq 0$,

   (b) Przesunięciem płaszczyzny o wektor $2\vec{AB}$ jeżeli $\alpha+\beta$ jest wielokrotnością $360°$, czyli $\alpha+\beta = 0$ (mierzymy z dokładnością do $360°$).

   Dowód: Niech XA będzie taką prostą, że $\angle XAB = \frac{\alpha}{2}$ i niech BY będzie taką prostą, że $\angle ABY = \frac{\beta}{2}$ (punkty X, Y leżą gdzieś daleko i służą tylko do ustalania półprostych). Z lematu $O_A^\alpha = S_{AB} \circ S_{XA}$ i $O_B^\beta = S_{BY} \circ S_{AB}$, więc $O_B^\beta \circ O_A^\alpha = S_{BY} \circ S_{AB} \circ S_{AB} \circ S_{XA}$. Oczywiście dwukrotna symetria względem prostej AB to to samo co identyczność, więc

$$O_B^\beta \circ O_A^\alpha = S_{BY} \circ S_{XA}$$

   Rozważmy 2 przypadki:

(a) Proste AX i BY są równoległe. Jest $\angle XAB = \angle YBC$, gdzie C leży na prostej BA po innej stronie B niż A, więc $\frac{\beta}{2} + \frac{\alpha}{2} = \angle ABY + \angle XAB = \angle ABY + \angle YBC = \angle ABC = 180°$, więc $\beta + \alpha = 2 \cdot 180° = 360° = 0°$.
Niech D będzie dowolnym punktem płaszczyzny, niech D' oznacza jego obraz w symetrii względem AX, a D'' obraz D' w symetrii względem BY, D_1 oznacza rzut prostopadły D na AX, a D_2 rzut prostopadły D na BY. Skoro $AX||BY$, to punkty D, D_1, D_2, D', D'' leżą na jednej prostej prostopadłej do AX.
Mamy, z własności symetrii $\vec{DD_1} = \vec{D_1D'}$ i $\vec{D'D_2} = \vec{D_2D''}$, ponadto, skoro wszystko leży na jednej linii, to $\vec{DD''} = \vec{DD_1} + \vec{D_1D'} + \vec{D'D_2} + \vec{D_2D''} = 2(\vec{D_1D'} + \vec{D'D_2}) = 2\vec{D_1D_2} = 2\vec{AB}$.

(b) Jeżeli AX i BY nie są równoległe to $\alpha + \beta \neq 0$ (rozumowanie analogiczne jak wyżej). Niech C oznacza punkt przecięcia AX i BY. Mamy

$$O_B^{\beta} \circ O_A^{\alpha} = S_{BY} \circ S_{XA} = O_C^{2\angle(XC,CY)}$$

Popatrzmy na trójkąt $\triangle ABC$. Kąt $\angle CAB$ to $\frac{\alpha}{2}$ lub $\frac{\alpha}{2} - 180°$, w zależności od tego, po której stronie prostej AB leży C i X (sprawdź na rysunku), ale zawsze zachodzi $2\angle CAB = \alpha$.
Analogicznie $\angle ABC$ może być równy $\frac{\beta}{2}$ lub $\frac{\beta}{2} + 180°$, tak czy owak $2\angle ABC = \beta$.
Skoro $\angle ABC + \angle CAB + \angle BCA = 180°$, $\alpha + \beta + 2\angle BCA = 2\angle ABC + 2\angle CAB + 2\angle BCA = 0°$, więc $2\angle BCA = -(\alpha + \beta)$, czyli $2\angle ACB = \alpha + \beta$.

10. **Definicja** *Powiemy, że 2 figury są zgodnie zorientowane, jeżeli są one podobne:* $A_1A_2 \cdots A_n \simeq B_1B_2 \cdots B_n$ *i odpowiednie kąty* ***skierowane*** *są równe:*

$$\angle A_1A_2A_3 = \angle B_1B_2B_3, \angle A_2A_3A_4 = \angle B_2B_3B_4, \cdots, \angle A_{n-1}A_nA_1 = \angle B_{n-1}B_nB_1, \angle B_nB_1B_2 = \angle A_nA_1A_2$$

11. Ten tekst powstał w dużej mierze w oparciu o artykuł prof. Piotra Grzeszczuka z Delty 10/04 dostępnego pod *www.mimuw.edu.pl/delta/artykuly/delta1004/grzeszczuk.pdf.*

Zadania

1. Punkt P leży wewnątrz trójkąta równobocznego ABC i jest $PA = 3$, $PB = 4$, $PC = 5$. P' jest takie, że trójkąt $\triangle APP'$ jest zgodnie zorientowany z $\triangle ABC$. Udowodnij, że $PP'C = 90°$.
Rozwiązanie:
Rozważmy obrót O_1 wokół A, przenoszący B na C (czyli obrót o $\pm 60°$, zależnie od orientacji $\triangle ABC$). Skoro $\triangle ABC$ i $\triangle APP'$ są zgodnie zorientowane, to O_1 przenosi P na P' (jeżeli nie wierzysz, to rozważ 2 przypadki - obrót o $60°$ i $-60°$).
Obrót ten przenosi B na C i P na P', więc $|CP'| = |BP| = 4$. Ponadto, $|PP'| = |AP| = 3$, bo $\triangle APP'$ jest równoboczny. Wiemy też, że $|CP| = 5$. Trójkąt $PP'C$ ma boki $3, 4, 5$, jest więc, z tw. odwrotnego do Pitagorasa, prostokątny, przy czym kąt prosty jest między bokami długości 3 i 4, czyli w P'.

2. Na płaszczyźnie dane są 2 trójkąty równoboczne zgodnie zorientowane ABC i CDE (mające wspólny wierzchołek C) oraz punkty F i G, takie, że $AD = AF$, $BE = BG$ i $\angle DAF = \angle EBG$ (kąty skierowane!). Wykazać, że trójkąt CFG jest równoboczny.
Rozwiązanie:
Niech O_1 oznacza obrót wokół C, przenoszący D na E (jest to obrót o $\angle DCE = \pm 60°$). Skoro $\triangle ABC$ i $\triangle CDE$ są zgodnie zorientowane, to O_1 przenosi A na B, więc przenosi on AD na BE, czyli

$$|AD| = |BE|$$

Obrót O_1 przenosi F na punkt F', taki, że, $|BF'| = |O_1(A)O_1(F)| = |AF| = |AD| = |BE| = |BG|$ i $\angle EBF' = \angle O_1(D)O_1(A)O_1(F) = \angle DAF = \angle EBG$. Drugie od końca przejście wynika z tego, że obrót zachowuje kąty. Z równości

$$|BF'| = |BG| \text{ i } \angle EBF' = \angle EBG$$

otrzymujemy $F' = G$. Tak więc obrót O_1 wokół C przenosi F na G, więc $|CF| = |CG|$ i $\angle FCG = \pm 60°$, czyli $FCG = 60°$ (zwykły kąt). Trójkąt $\triangle CFG$ jest równoramienny o kącie $60°$ między ramionami, jest więc równoboczny.

Faktu, że w równości $\angle DAF = \angle EBG$ mamy kąty skierowane, użyliśmy do udowodnienia, że $F' = G$. Gdyby nie było tu kątów skierowanych, a zwykłe, to ten dowód i teza byłyby fałszywe.

3. Na bokach trójkąta ABC budujemy, po zewnętrznej stronie trójkąty równoboczne. Udowodnij, że środki ciężkości tych trójkątów tworzą trójkąt równoboczny.

Rozwiązanie:

Bez straty ogólności możemy założyć, że obrót wokół środka ciężkości trójkąta zbudowanego na boku XY o $120°$ przenosi X na Y, gdzie $(X, Y) = (A, B), (B, C), (C, A)$ (czyli odp. obroty przerzucają A na B, B, na C, C na A, żeby tak było, wystarczy ew. pozamieniać nazwy punktów A, B, C). Niech K, L, M oznaczają środki ciężkości trójkątów zbudowanych na bokach AB, BC, CA, odpowiednio. Z tego, co powiedziałem wyżej, wynika, że

$$O_K^{120°}(A) = B, O_L^{120°}(B) = C, O_M^{120°}(C) = A$$

Z tych równości wynika, że

$$O_M^{120°} \circ O_L^{120°} \circ O_K^{120°}(A) = O_M^{120°} \circ O_L^{120°}(B) = O_M^{120°}(C) = A$$

dokończenie 1: Twierdzenie o składaniu obrotów mówi, nam, że złożenie obrotów $O_L^{120°} \circ O_K^{120°}$ jest obrotem wokół pewnego punktu X o $240°$. Co więcej, wiemy, że $O_X^{240°} = O_L^{120°} \circ O_K^{120°}(A) = C$, tak więc musi zachodzić $|XA| = |XC|$ i $\angle AXC = 240°$, czyli $\angle CXA = -240° = 120°$. Jedynym punktem spełniającym te równania jest punkt M, a więc $X = M$. Dalej korzystając z tego twierdzenia otrzymujemy

$$\angle MKL = 60°, \angle MLK = -60°$$

Skoro kąty wewnętrzne w trójkącie $\triangle MLK$ są mniejsze od $180°$, to $MKL = MLK = 60°$, a więc trójkąt $\triangle MKL$ jest równoboczny.

dokończenie 2: Zamiast szukać X z definicji, możemy pójść dalej i stwierdzić, że z tw. o składaniu obrótow, przekształcenie $O_M^{120°} \circ O_L^{120°} \circ O_K^{120°}$ jest przesunięciem o wektor (bo $120° + 120° + 120° = 0°$), a skoro zachowuje ono na miejscu punkt A, to musi być identycznością (przesunięciem od wektor zerowy), gdyż przesunięcie o wektor niezerowy nie zachowuje żadnego punktu. Mamy więc

$$O_M^{120°} \circ O_L^{120°} \circ O_K^{120°} = \mathrm{id}$$

czyli

$$O_M^{-120°} \circ O_M^{120°} \circ O_L^{120°} \circ O_K^{120°} = O_M^{-120°}$$
$$O_L^{120°} \circ O_K^{120°} = O_M^{-120°}$$

Stąd bezpośrednio wnioskujemy, że X, określony jak w dokończeniu 1. jest równy M. Dalsze rozumowanie jak w dokończeniu 1.

4. Dane są rozłączne oprócz punktu C, zgodnie zorientowane kwadraty $ACMN$ i $KLCB$ o środkach P i R odpowiednio. Niech Q, S będą środkami odcinków AB, ML. Wykazać, że $PQRS$ jest kwadratem.

Rozwiązanie:

Niech O_1 będzie obrotem o środku w P przekształcającym A na C, jest to obrót o $\pm 90°$. Wtedy obrót O_2 o środku w R o tę samą ilość stopni co O_1 przekształca C na B, gdyż $ACMN$ i $KLCB$ są zgodnie zorientowane.

Rozważmy złożenie:

$$O_2 \circ O_1$$

Jest to obrót o $\pm 90° = \pm 180° = 180°$, gdyż mierzymy z dokładnością do $360°$, wokół pewnego X. Ponadto obrót ten przekształca A w C, czyli X jest środkiem odcinka AC, a więc $X = S$. Z tw. o złożeniu obrotów

$$\angle SPR = 45° \text{ i } \angle SRP = -45°$$

Skoro są to kąty w trójkącie, czyli ich miary są mniejsze od $180°$, to

$$SPR = SRP = 45° (\text{„zwykłe'' kąty})$$

Trójkąt PSR jest więc równoramienny i prostokątny. Rozpatrując złożenie obrotów wokół P i R przekształcających M na C i C na L, udowadniamy, że PQR jest prostokątny równoramienny, a więc $PQRS$ jest kwadratem.

5. Dane są punkty A, B, C, D tworzące czworokąt wypukły. Punkt P jest taki, że $|AP| = |BP|$, $|CP| = |DP|$ oraz $APB = CPD = 90°$. Udowodnij, że $|AC| = |BD|$ i $AC \perp BD$. Przy okazji, jaki jest warunek konieczny i dostateczny na to, żeby przekątne w czworokącie przecinały się pod kątem prostym?
   Rozwiązanie:
   Skoro $ABCD$ jest wypukły (ważna jest tutaj kolejność wierzchołków), to kąty $\angle APB$ i $\angle CPD$ są zgodnie zorientowane. Obrót O wokół P, przekształcający A na B przekształca też AC na BD, więc $|AC| = |BD|$. Obrót O jest obrotem o $\pm 90°$, więc kąt skierowany między AC a BD wynosi też $\pm 90°$, zwykły kąt wynosi więc $90°$, czyli $AC \perp BD$.
   Warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, żeby przekątne w czworokącie wypukłym przecinały się pod kątem prostym jest: sumy kwadratów długości przeciwległych boków są równe, inaczej, $|AB|^2 + |CD|^2 = |AD|^2 + |BC|^2$.

6. Na bokach czworokąta wypukłego $ABCD$ zbudowano, po zewnętrznej stronie trójkąty prostokątne równoramienne ABP, BCQ, CDR, DAS, z kątami prostymi przy P, Q, R, S. Udowodnij, że $PR \perp QS$.
   Rozwiązanie:
   Niech O_1 będzie obrotem wokół P przekształcającym A na B, a O_2 obrotem wokół Q przekształcającym B na C. Obroty te są zgodnie zorientowane, więc rozumujemy jak w zadaniu 4. i stwierdzamy, że
   $$O_2 \circ O_1 = O_M^{180°}$$
   gdzie M jest środkiem AC. Stąd, rozumując jak dalej w zadaniu 4.:
   $$|MP| = |MQ| \text{ i } PMQ = 90°$$
   Analogicznie stwierdzamy, że
   $$|MP| = |MR| \text{ i } RMS = 90°$$
   Pozostaje krótko uzasadnić, że $PQRS$ jest wypukły (wskazówka: można rozważyć podział płaszczyzny prostymi zawierającymi boki $ABCD$) i skorzystać z poprzedniego zadania.

7. Punkt P leży wewnątrz czworokąta wypukłego $ABCD$ i jest taki, że ADP i BCP są równoboczne. Na bokach AB i CD zbudowano, po zewnętrznej stronie trójkąty równoboczne ABL i CDM. Udowodnić, że P jest środkiem odcinka LM.
   Rozwiązanie:
   Rozważmy złożenie obrotu O_1 wokół A, przekształcającego L na B, O_2 wokół P przekształcającego B na C, O_3 wokół D, przekształcającego C na M. Te 3 obroty są zgodnie zorientowane (zrób rysunek i popatrz dlaczego) i są to obroty o $\pm 60°$. Złożenie $O_3 \circ O_2 \circ O_1$ jest więc obrotem o $\pm 3 \cdot 60° = 180°$, przenoszącym L na M, jest więc obrotem wokół środka odcinka LM.
   Złożenie obrotów wokół A i P jest obrotem o $\pm 120°$ wokół punktu X, takiego, że
   $$\angle XAP = \pm 30° \text{ i } \angle XPA = \mp 30°$$
   Punkt X jest więc (zrób rys. i patrz rys.) punktem symetrycznym do środka trójkąta APD względem prostej AP.
   Popatrzmy teraz na złożenie obrotów o $\pm 120°$ wokół X i o $\pm 60°$ wokół D, jak na obrót o $180°$ wokół Y. Punkt Y musi spełniać
   $$\angle YXD = \pm 60° \text{ i } \angle YDX = \mp 30°$$
   Zauważmy, że punkt P spełnia obie te zależności (a punkt je spełniający jest tylko jeden), jest więc $P = Y$, co kończy dowód, bowiem $O_Y^{180°}(L) = M$.

8. Na zewnątrz boków AB i BC trójkąta ABC zbudowano trójkąty prostokątne równoramienne ABP i BCQ, z kątami prostymi przy wierzchołkach P i Q. Udowodnić, że jeżeli M - środek boku AC, to trójkąt MPQ jest też równoramienny prostokątny.
   Rozwiązanie:
   Złożenie obrotu wokół P, przekształcającego A na B i obrotu wokół Q, przekształcającego B na C jest obrotem o $180°$, przekształcającym A na C, jest więc obrotem wokół M, czyli $MPQ = MQP = 45°$, trójkąt MPQ jest więc prostokątny i równoramienny (szczegóły jak w zadaniu 4.).

9. **58 OM, 2 etap, zadanie 2.** Dany jest pięciokąt wypukły $ABCDE$, w którym $BC = CD$, $DE = EA$, $BCD = DEA = 90°$. Udowodnić, że z odcinków o długościach AC, CE, EB można zbudować trójkąt. Wyznacz miary jego kątów znając miarę α kąta ACE i miarę β kąta BEC.
Rozwiązanie:
Jeżeli potraktujemy pięciokąt z zadania jako trójkąt ABD z doczepionymi trójkątami prostokątnymi równoramiennymi, to, stosując poprzednie zadanie, otrzymujemy ECM - prostokątny równoramienny (kąt prosty przy M), gdzie M - środek AB.
Obrót o $180°$ wokół M przenosi A na B i da się rozpisać jako złożenie symetrii względem MC z symetrią względem ME, gdyż $CM \perp ME$ (patrz lemat w części teoretycznej), czyli

$$S_{ME} \circ S_{CM}(A) = B$$

Niech $K = S_{CM}(A)$. Wtedy $|KC| = |CA|$ i $S_{ME}(K) = B$, więc $|KE| = |BE|$. Trójkąt EKC ma więc długości boków AC, CE, EB. Pozostaje wyliczyć jego kąty. Jest $MEB = MEC - BEC = 45 - \alpha$, więc $KEC = 2(45 - \alpha) + \alpha = 90 - \alpha$. Analogicznie $KCE = 90 - \beta$, więc $EKC = \alpha + \beta$. Możemy tak swobodnie wszystko dodawać, mimo, że są to kąty zwykłe, bo pięciokąt $ABCDE$ jest wypukły i to narzuca odpowiednie położenie punktów na płaszczyźnie (zrób rys. i patrz rys.).

10. **57 OM, 2 etap, zadanie 5.** Punkt C jest środkiem odcinka AB. Okrąg o_1 przechodzący przez A, C przecina okrąg o_2 przechodzący przez B, C w różnych punktach C, D. Punkt P jest środkiem tego łuku AD okręgu o_1, który nie zawiera C. Punkt Q jest środkiem tego łuku BD okręgu o_2, który nie zawiera C. Dowieść, że $CD \perp PQ$.
Rozwiązanie:
Kąty $\angle BQD$ i $\angle DPA$ są zgodnie zorientowane. Ponadto (w zwykłych kątach) $BQD = 180° - BCD$ i $DPA = 180° - ACD$ (punkty P, Q, D leżą z tej samej strony AB), więc $BQD + DPA = 180°$. Skoro kąty te są zgodnie zorientowane to

$$\angle BQD + \angle DPA = 180°$$

Obrót o $\angle BQD$ wokół Q przekształca B na D, a obrót o $\angle DPA$ wokół P przekształca D na A, więc złożenie $O_P^{\angle DPA} \circ O_Q^{\angle BQD}$ przekształca B na A, a jest ono obrotem o $\angle BQD + \angle DPA = 180°$ wokół pewnego X, a więc X musi być środkiem boku AB, czyli $X = C$.
Z tw. o składaniu obrotów otrzymujemy więc

$$\angle CPQ = \frac{\angle DPA}{2}$$

ponieważ $\frac{DPA}{2}$ jest kątem o mierze mniejszej niż $180°$ (przechodząc od kątów skierowanych do zwykłych musimy pamiętać, o tym, że mogłoby, teoretycznie, być $CPQ = \pm 180° + \frac{DPA}{2}$, bo liczymy z dokładnością do $360°$ miarę DPA), to i

$$CPQ = \frac{DPA}{2}$$

Z drugiej strony, czego zresztą milcząco użyłem przy definiowaniu obrotów, jest $|PA| = |PD|$, więc $\triangle DPA$ jest równoramienny, a więc

$$ADP = \frac{180° - DPA}{2} = 90° - \frac{DPA}{2} = 90 - CPQ$$

Ponieważ wszystko leży tak jak powinno :P, w szczególności półprosta CD przecina PQ, to jeżeli oznaczymy punkt przecięcia CD z PQ jako E, to kąty w trójkącie CEP spełniają $PCE = 90° - CPE$, więc

$$CEP = 90°$$

To kończy dowód.