Warunki

Joachim Jelisiejew
2 listopada 2011

Przykład 1

Liczby dodatnie a, b, c są takie, że $a + b + c = \frac{1}{223}$. Uzasadnij, że $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geqslant 2007$.

W większości wypadków stykając się z nierównością zawierającą warunek możemy go usunąć. Metoda używa tzw. wyrażeń jednorodnych.

Zauważmy, że podstawienie w wyrażeniu $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ zamiast a liczby $n \cdot a$, zamiast b liczby $n \cdot b$ i zamiast c liczby $n \cdot c$ da nam wyrażenie $n^{\mathbf{-1}} \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$. Powiemy więc, że wyrażenie $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ jest jednorodne stopnia $\mathbf{-1}$. Pora na formalną definicję $\ddot\smile$, która w zasadzie nie jest potrzebna, jak się zrozumie, o co chodzi:

Definicja 1.1 (Wyrażenie jednorodne)**.** *Wyrażenie jest jednorodne stopnia k, jeżeli dla każdego $n > 0$ po powiększeniu n razy każdej ze zmiennych wyjściowe wyrażenie przyjmuje wartość n^k razy większą.*

Wniosek 1.2. *Jeżeli wyrażenie W jest stopnia k i V jest stopnia k, to $W + V$ jest stopnia k. Jeżeli W jest stopnia k, a V stopnia l, to $W \cdot V$ jest stopnia $k + l$.*

Przykłady wyrażeń (zmienne wszędzie a, b, c):

1. Wyrażenia $a, a + 2 \cdot b, a + b + c$ są jednorodne stopnia 1, gdyż $(na) = n \cdot (a)$, $(na) + 2 \cdot (nb) = n \cdot (a + 2 \cdot b)$ oraz $(na) + (nb) + (nc) = n \cdot (a + b + c)$.

2. Wyrażenie 4 jest jednorodne stopnia 0 — cokolwiek nie zmienialibyśmy w zmiennych a, b, c wartość jest stała.

   Jednorodne stopnia 0 jest też wyrażenie $\frac{b}{c}$ oraz np. wyrażenie $\frac{b^2}{ac} + 2 + a^{-1}b$.

3. Wyrażenie $\frac{a^4}{b} + bc \cdot \sqrt{ab}$ jest jednorodne stopnia 3, bo
$$\frac{(na)^4}{nb} + (nb)(nc) \cdot \sqrt{(na)(nb)} = n^3 \cdot \left(\frac{a^4}{b} + bc \cdot \sqrt{ab}\right).$$

4. Wyrażenie $a^2 + b$ nie jest jednorodne, bo (*to nie formalne wyjaśnienie*) $(n \cdot a)^2 + nb = n^2a^2 + n \cdot b$ i tego nie da się przedstawić w postaci $n^k \cdot (a^2 + b)$.

Rozwiązanie zadania 1

Część nieoficjalna — jak wykorzystać warunek.

Chcemy tak użyć warunku, by w nierówności będącej tezą strony były jednorodne i równych stopni. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ jest stopnia -1, a 2007 jest stopnia 0. W warunku lewa strona jest stopnia 1 a prawda stopnia 0, zatem wymnażamy lewą stronę teza przez (dodatnią!) lewą stronę warunku, a prawą stronę tezy przez prawą stronę warunku:

$$(a + b + c) \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geqslant 9$$

co po podzieleniu przez $3 \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$ jest nierównością pomiędzy średnią arytmetyczną, a harmoniczną.

Wszystkie poniższe zadania po odpowiednim wstawieniu warunku sprowadzają się do nierówności, które można udowodnić stosując średnią arytmetyczną i geometryczną.

Zadanie 2

Kwadraty liczb dodatnich a, b, c sumują się do 1. Uzasadnij, że $-\frac{1}{2} \leqslant ab + bc + ca \leqslant 1$.

Zadanie 3

Liczby dodatnie a, b, c spełniają warunek $a + b + c = 1$. Udowodnij, że zachodzi nierówność $a^2 + b^2 + c^2 - 2(ab + bc + ca) \geqslant -\frac{1}{3}$.

Zadanie 4

Iloczyn liczb dodatnich a, b, c jest równy 1. Udowodnij, że $a + b + c \geqslant 3$. Wykaż też, że $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant 3$.

Zadanie 5

Iloczyn liczb dodatnich a, b, c, d to 2011. Jaka jest najmniejsza wartość wyrażenia $a^{-1} + b^{-1} + c^{-1} + d^{-1}$?

Zadanie $\star$ 6

Liczby dodatnie a, b, c sumują się do 1. Pokaż, że $(1 + a)(1 + b)(1 + c) \geqslant 8(1 - a)(1 - b)(1 - c)$.