Nierówności

kółko I LO Białystok

29 listopada 2013

Zadania w sporej części pochodzą z białostockiego koła PTM, `ptm.pb.edu.pl`.

1.1 Twierdzenie Bèzouta

Twierdzenie Bèzouta daje użyteczny, choć i prosty trik do zwijania nierówności. Jeżeli mamy wielomian Q od zmiennych a, b i podstawienie $a := b$ sprawia, że wielomian Q staje się zerem, to $Q = (a-b)\cdot R$, gdzie R jest innym wielomianem. Przykładowo skoro $a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$ staje się zerem po podstawieniu $a := b$, więc $a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4 = (a-b)\cdot$ COŚ. Przeliczenie daje COŚ $= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$, więc znowu możemy zapisać COŚ $= (a-b)$ COŚ$_2$ itd. Oczywiście twierdzenie nie jest potrzebne do tego, by tak zapisywać, ale warto wiedzieć, że można łatwo sprawdzić, czy da się wyłączyć $a-b$ przed nawias. Ten sam trik działa oczywiście również dla podstawienia $a := 3b$ itd.

Zadanie 1

Liczby a, b są rzeczywiste dodatnie. We wszystkich poniższych nierównościach zastąp ⩾☠⩽ jednym ze znaków: $\geqslant, \leqslant$ po czym udowodnij otrzymaną nierówność.

1. $ab^{n-1} + a^{n-1}b$ ⩾☠⩽ $a^n + b^n$, gdzie n jest całkowite dodatnie.
2. $a^{-1}b^{n+1} + a^{n+1}b^{-1}$ ⩾☠⩽ $a^n + b^n$, gdzie n jest całkowite dodatnie.
3. $a^kb^{n-k} + a^{n-k}b^k$ ⩾☠⩽ $a^n + b^n$, gdzie n jest całkowite dodatnie, zaś k jest całkowite z przedziału $[0, n]$.
4. $n(a-b)(a^{n-1} + b^{n-1})$ ⩾☠⩽ $2(a^n - b^n)$, gdzie $n \in \mathbb{Z}_+$.
5. $(1+a^3)^2(1+b^3)$ ⩾☠⩽ $(1+ab^2)^3$.

Zadanie 2

Liczby dodatnie a, b, c są takie, że

$$abc = 1 \text{ oraz } a + b + c > a^{-1} + b^{-1} + c^{-1}.$$

Wykaż, że dokładnie jedna z tych liczb jest większa od 1.

1.2 Średnie

Zadanie 3

Liczby $x_1, \ldots, x_n$ są dodatnie. We wszystkich poniższych nierównościach zastąp ⩾☠⩽ jednym ze znaków: $\geqslant, \leqslant$ po czym udowodnij otrzymaną nierówność.

1. $\frac{1}{n}\left(x_1^2 + \ldots + x_n^2\right)$ ⩾☠⩽ $\left(\frac{x_1+\ldots+x_n}{n}\right)^2$,
2. $\frac{1}{n}\left(\sqrt{x_1} + \ldots + \sqrt{x_n}\right)$ ⩾☠⩽ $\sqrt{\frac{x_1+\ldots+x_n}{n}}$,
3. $\frac{1}{n}\left(\sqrt[3]{x_1} + \ldots + \sqrt[3]{x_n}\right)$ ⩾☠⩽ $\sqrt[3]{\frac{x_1+\ldots+x_n}{n}}$.

Zadanie 4

Liczby dodatnie $a_1, \ldots, a_n$ sumują się do 1. Wyznacz, w zależności od n, najmniejszą możliwą wartość wyrażenia

$$\frac{a_1}{2-a_1} + \ldots + \frac{a_n}{2-a_n}.$$

Zadanie 5

Liczby x, y, z, t są nie mniejsze od $1/4$ i spełniają równość $x^2+y^2+z^2+t^2 = 1$. Wyznacz najmniejszą i największą wartość, jaką może przyjąć iloczyn $xyzt$.

Zadanie 6

Udowodnić, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x_1, \ldots, x_n$ zachodzi nierówność

$$x_1x_2\ldots x_n \leqslant \frac{x_1^2}{2} + \frac{x_2^4}{4} + \frac{x_3^8}{8} + \ldots + \frac{x_n^{2^n}}{2^n} + \frac{1}{2^n}.$$

Zadanie 7 *

Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b, c zachodzi nierówność

$$6(a^2+b^2+c^2)(a+b+c) \leqslant 9(a^3+b^3+c^3) + (a+b+c)^3.$$