Prosta pomocnicza

Joachim Jelisiejew
15 listopada 2011

To kółko korzysta m.in. z referatu dra Osękowskiego na konferencji SEM w Sulejowie w 2008r. oraz z ogólnodostępnej książki Hoojoo Lee "Topics in ineqalities".

1.1 Teoria

W tym tygodniu $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest funkcją różniczkowalną. Przypomnijmy, że prosta styczna do wykresu f w punkcie x_0 ma równanie

$$L_{x_0}(x) = f(x_0) + (x - x_0) \cdot f'(x_0). \tag{1}$$

Warto wspomnieć następujący

Lemat 1.1.

1. *Jeżeli na pewnym przedziale (a, b) funkcja f' jest rosnąca (malejąca) to mówimy, że f jest wypukła (wklęsła) na (a, b).*
2. *Jeżeli f'' istnieje i jest dodatnia (ujemna) na (a, b) to f jest wypukła (wklęsła) na (a, b).*
3. *Jeżeli funkcja f jest wypukła (wklęsła) na (a, b), to wykres L leży pod (ponad) wykresem f.*

Funkcja f może być skomplikowana, w nierównościach będziemy starali się zastąpić ją prostszą (bo liniową) funkcją L_{x_0}. Kluczowe jest tutaj odpowiednie dobranie punktu x_0. Powinno ono być takie, żeby w wyjściowej nierówności po podstawieniu za zmienne x_0 zachodziła równość.

Czasami nie da się skorzystać z wypukłości funkcji f (np. gdy jest ona funkcją wielu zmiennych), wtedy nierówność $f \geqslant L_{x_0}$ trzeba spróbować udowodnić ręcznie.

Przykładowe zadanie poniżej:

Zadanie 0

Udowodnić, że jeśli $a_1, \ldots, a_n$ są dodatnie, to $\frac{a_1+\ldots+a_n}{n} \geqslant \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\ldots+\frac{1}{a_n}}$ (nierówność pomiędzy arytm. a harm.).

Rozwiązanie.

Części zapisane kursywą nie muszą być częścią dowodu.

Podstawowy problem jest taki, że równość zachodzi zawsze gdy $a_1 = \ldots = a_n$ — nie ma jednej konkretnej wartości, dla której zachodzi. Ale nierówność jest jednorodna względem $a_1, \ldots, a_n$ — możemy przyjąć dodatkowy warunek

$$a_1 + \ldots + a_n = n \text{ i udowadniać, że } 1 \geqslant \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n}}, \text{ równoważnie } \frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n} \geqslant n.$$

Mamy teraz (zgadujemy) dokładnie jeden punkt, w którym zachodzi równość $a_1 = \ldots = a_n = 1$.

Zauważmy, że $f(x) = \frac{1}{x}$ jest funkcją wypukłą na $(0, \infty)$ oraz $L_1(x) = 1 + (x-1)(-1) = 2 - x$. Z wypukłości f wynika, że $L_1(x) \leqslant f(x)$ dla każdego $x \geqslant 0$ *można to też policzyć bezpośrednio.* Tak więc

$$\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n} \geqslant (2 - a_1) + \ldots + (2 - a_n) = 2n - (a_1 + \ldots + a_n) = 2n - n = n.$$

co było do udowodnienia.

Gdybyśmy wybrali zły punkt, np. $1/2$, otrzymalibyśmy nierówność $\frac{1}{a_1} \geqslant L_{1/2}(x) = 2 + (x - 1/2) \cdot (-4) = 4 - 4x$, a po zsumowaniu $\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n} \geqslant 4n - 4(a_1 + \ldots + a_n) = 4n - 4n = 0$, co nie jest fajne.

1.2 Zadania

Zadanie 1
Niech a, b będą liczbami dodatnimi, takimi, że $a+b=1$. Udowodnić, że

$$\frac{a^2}{a+1}+\frac{b^2}{b+1}\geqslant\frac{1}{3}.$$

Zadanie 2
Udowodnij, że jeśli $a, b, c>0$, to

$$\frac{4a^2}{b+c}+\frac{4b^2}{a+c}+\frac{4c^2}{a+b}\geqslant 2(a+b+c).$$

Wskazówka: jak w przykładzie dodaj warunek $a+b+c=\dots$

Zadanie 3
Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c zachodzi nierówność Nesbitta

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\geqslant\frac{3}{2}.$$

Wskazówka: jak w przykładzie dodaj warunek $a+b+c=\dots$