KEEP CALM IT'S THE FINAL COUNTDOWN

We've learning together, but still its so late...

kółko I LO Białystok

31 marca 2014

1.1 Nieco przypomnienia — jedno-monotoniczne

Jeżeli mamy ciągi liczb rzeczywistych $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ to

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ b_1 & b_2 & \ldots & b_n \end{bmatrix} := a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n.$$

jest fajnym zapisem czegoś oczywistego. Przykładowo $5 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} > \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = 4$. To jest ogólniejszy fenomen:

Twierdzenie 1. *Weźmy ciągi niemalejące $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n$ oraz $b_1 \leqslant b_2 \leqslant \ldots \leqslant b_n$. Jeżeli $b'_1, \ldots, b'_n$ jest permutacją ciągu $b_1, \ldots, b_n$, to*

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ b_n & b_{n-1} & \ldots & b_1 \end{bmatrix} \leqslant \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ b'_1 & b'_2 & \ldots & b'_n \end{bmatrix} \leqslant \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ b_1 & b_2 & \ldots & b_n \end{bmatrix}.$$

Innymi słowy: największą wartość osiągamy układając ciągi zgodnie, najmniejszą — przeciwnie.

1.2 Nieco przypomnienia — Jensen

Twierdzenie 2 (nierówność Jensena). *Niech $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ będzie funkcją wypukłą. Jeżeli liczby $x_1, x_2, \ldots, x_n$ są dodatnie, zaś liczby nieujemne $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sumują się do 1, to zachodzi*

$$f(\alpha_1x_1 + \alpha_2x_2 + \ldots + \alpha_nx_n) \leqslant \alpha_1f(x_1) + \alpha_2f(x_2) + \ldots + \alpha_nf(x_n)$$

Jeśli funkcja jest wklęsła, nierówność zachodzi w drugą stronę.

1.3 Nieco niebanalnych (nie)zadanek

Zadanie 1

Rozstrzygnij, który ze znaków $\leqslant$, $\geqslant$ (jeżeli którykolwiek) można wstawić w miejsce $\square$ tak, by otrzymana nierówność była prawdziwa dla wszystkich liczb a, b, c, d rzeczywistych dodatnich

$$a^4b + b^4c + c^4d + d^4a \ \square\ a^3bc + b^3cd + c^3da + d^3ab.$$

Zadanie 2 Warsztaty Mat. 2010

Dane są liczby rzeczywiste dodatnie $a_1, \ldots, a_{2014}$. Wykaż, że zachodzi nierówność

$$\sum_{j=1}^{2010} \frac{a_j^2}{a_j + a_{j+1}} \geqslant \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2010} a_j.$$

Zadanie 3 OM 2001

Niech $x_1, \ldots, x_{2014}$ będą liczbami nieujemnymi. Pokaż, że

$$\sum_{i=1}^{2014} x_i^i + \binom{2014}{2} \geqslant \sum_{i=1}^{2014} i \cdot x_i.$$

Zadanie 4 Olimpiada Ukraińska 96

Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c zachodzi nierówność

$$\frac{a^3}{b+2c} + \frac{b^3}{c+2a} + \frac{c^3}{a+2b} \geqslant \frac{a+b+c}{3}.$$

Częściowa wskazówka: można przepałować, zrobić z ciągów jednomonotonicznych, z Jensena albo pochodnymi.

Zadanie 5

Rozstrzygnij, który ze znaków $\leqslant$, $\geqslant$ (jeżeli którykolwiek) można wstawić w miejsce $\square$ tak, by otrzymana nierówność była prawdziwa dla wszystkich liczb a, b, c rzeczywistych dodatnich

$$a^4b + b^4c + c^4a \ \square\ a^3bc + b^3ca + c^3ab.$$

To zadanie pokazuje różnicę pomiędzy nierównościami w trzech i czterech zmiennych.