Czy to jest dowód?

kółko I LO Białystok

26 marca 2013

Zadania na kółko

Należy wybrać zadanie z poniższych trzech i postarać się rozwiązać je w grupie; po wszystkim każdy z grupy powinien rozumieć, o co chodzi w rozwiązaniu i umieć je wytłumaczyć.

Zadanie 1
Suma dziesięciu liczb całkowitych dodatnich jest równa 1001. Wyznacz największą możliwą wartość największego wspólnego dzielnika tych liczb.

Zadanie 2
Wykaż, że kwadrat obwodu trójkąta jest większy niż dwunastokrotność jego pola.

Zadanie 3
Wykaż, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n liczba $5^n + 2 \cdot 3^{n-1} + 1$ jest podzielna przez 8.

***

Tytułowe zadanie.

Przypominam zadanie z I serii Ligi zadaniowej:

Zadanie 4
Sześcian $3 \times 3 \times 3$ podzielono cięciami na 27 sześcianików $1 \times 1 \times 1$. Ile minimalnie było cięć?

Cięcia muszą być proste, tzn. być przecięciem wzdłuż płaszczyzny. Można jednocześnie ciąć kilka kawałków sześcianu, ułożonych jeden na drugim.

Pytanie: Które z poniższych rozwiązań są właściwe?

Rozwiązanie I

Uzasadnijmy, że minimalnie było sześć cięć. Rozważmy sześcianik $1 \times 1 \times 1$ znajdujący się początkowo w środku dużego sześcianu. Musimy odciąć sześć ścianek tego sześcianiku, a każde cięcie wycina co najwyżej jedną. Potrzeba więc co najmniej sześciu cięć.

Rozwiązanie II

No więc, wiemy, że trzeba sześciu cięć, bo tnąc normalnie równolegle do ścianek [tutaj jest rysunek] da radę ogarnąć w sześciu cięciach; no a środkowy jest na początku połączony z sześcioma sąsiednimi i cięcie odczepia go tylko od jednego, więc potrzeba co najmniej sześciu.

Rozwiązanie III

Minimalnie było 6 cięć.

Rozwiązanie IV

Wsadźmy sześcian w układ współrzędnych tak, żeby przeciwległe wierzchołki miały współrzędne $(0,0,0), (3,3,3)$ a krawędzie sześcianu były równoległe do osi układu. Tniemy wzdłuż płaszczyzn przechodzących przez punkty $(1,0,0), (1,3,0), (1,0,3)$; $(2,0,0), (2,3,0), (2,0,3)$; $(0,1,0), (3,1,0), (0,1,3)$; $(0,2,0), (3,2,0), (0,2,3)$; $(0,0,1), (0,3,1), (3,0,1)$; $(0,0,2), (0,3,2), (3,0,2)$. To daje nam podział na 27 sześcianików w sześciu cięciach.