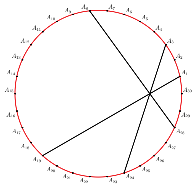


Geometria foremna

kółko I LO Białystok
18 października 2013

Nieco prostsze

Zadanie 1
Uzasadnij, że punkt przecięcia wysokości trójkąta ostrokątnego jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt, którego wierzchołkami są spodki wysokości. Czy coś zmieni się, jeżeli odrzucimy założenie ostrokątności?

Zadanie 2
Punkt P leży wewnątrz kwadratu $ABCD$ i jest taki, że trójkąt APB ma miary kątów $\sphericalangle PAB = \sphericalangle PBA = 15°$. Oblicz miary kątów $\triangle CDP$.

Zadanie 3
Oznaczmy przez b, c długości boków AB, AC trójkąta ABC.

1. Niech D będzie punktem przecięcia dwusiecznej $\sphericalangle BAC$ z bokiem BC. Oblicz BD/CD w zależności od b, c.
2. $\star$ Prosta ℓ jest *symedianą* z wierzchołka A w trójkącie ABC tzn. odbiciem środkowej AM względem dwusiecznej kąta $\sphericalangle BAC$. Niech E będzie punktem przecięcia ℓ z bokiem BC. Oblicz BD/CD w zależności od b, c.

Zadanie 4
Na bokach trójkąta ostrokątnego ABC zbudowano, po zewnętrznej stronie, kwadraty ABD_1D_2, BCE_2E_1. Uzasadnij, że proste AE_1, CD_1, E_2D_2 mają punkt wspólny.

Zadanie 5
Znajdź największy wspólny dzielnik wszystkich liczb postaci $7^{n+2} + 8^{2n+1}$, gdzie n jest całkowite nieujemne.

Zadanie 6
Dla liczby całkowitej dodatniej n wyznaczyć największą liczbę $k = k(n)$ o tej własności, że w zbiorze n elementowym można wybrać k różnych podzbiorów, spośród których każde dwa mają niepuste przecięcie.

Trudniejsze

Zadanie 7
Ciąg $\{p_n\}$ określony jest następująco: $p_1 = 2, p_2 = 3$ oraz p_n jest największym dzielnikiem pierwszym liczby $p_1 \dots p_{n-1} + 1$. Czy ciąg $\{p_n\}$ zawiera wszystkie liczby pierwsze?

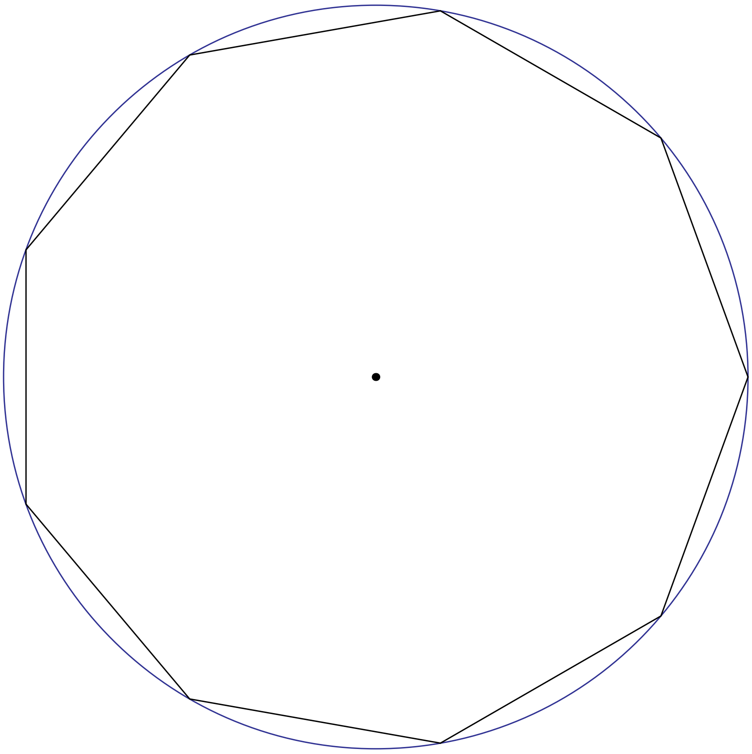
Zadanie 8
Dany jest dziewięciokąt foremny $A_1A_2 \dots A_9$. Punkt P jest środkiem mniejszego łuku A_2A_3, zaś M jest środkiem odcinka A_7A_8.

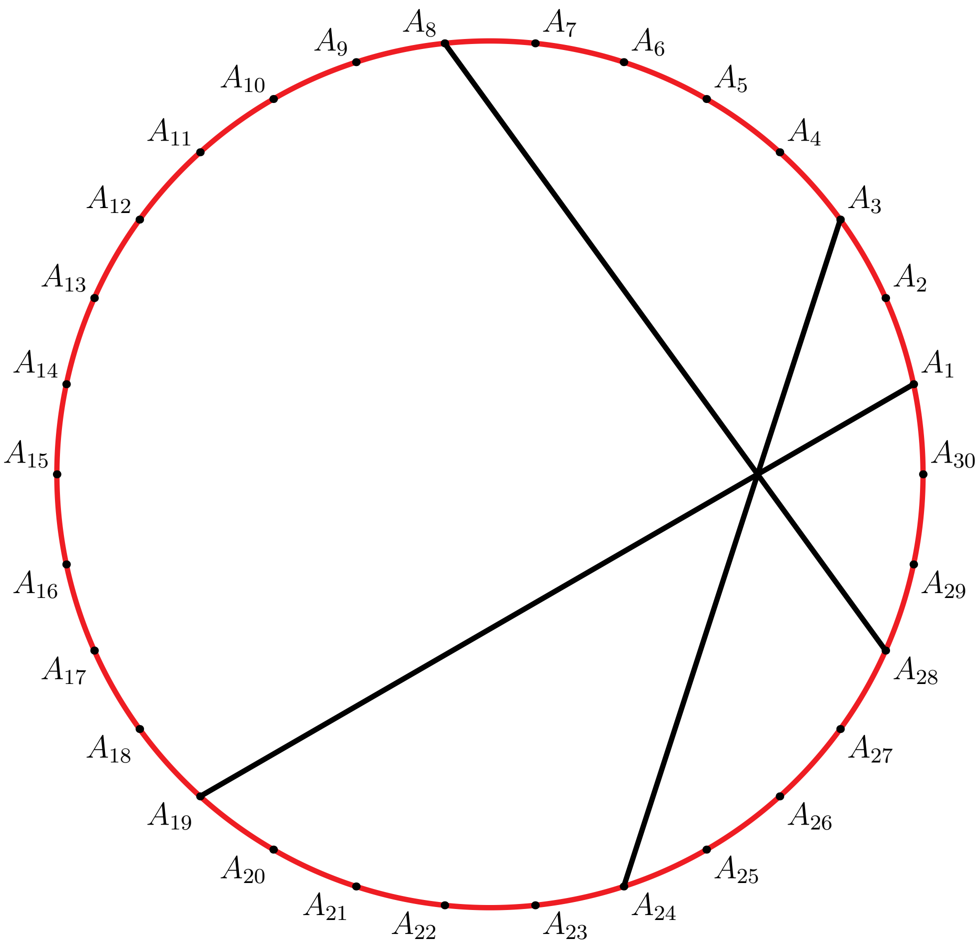
1. Uzasadnij, że proste A_6P, A_1A_5, A_4A_8 przecinają się w jednym punkcie E. Oblicz miarę $\sphericalangle A_9EA_8$.
2. Uzasadnij, że proste A_5A_9, A_6A_1, A_3M przecinają się w jednym punkcie.

Zadanie 9 $\star$
Punkt M jest środkiem boku AB trójkąta ABC. Punkt D leży wewnątrz tego trójkąta i spełnia warunki: $\sphericalangle DAC = \sphericalangle ABC, \sphericalangle DCA = \sphericalangle BCM$. Wykazać, że prosta DM jest równoległa do prostej BC.

Zadanie 10 $\star\star$, bo zrobiłem sinusami :)
Na bokach BC i AC trójkąta ABC wybrano odpowiednio punkty D i E tak, że zachodzą równości $\sphericalangle BAD = 50°, \sphericalangle ABE = 30°$. Obliczyć miarę $\sphericalangle BED$, jeśli $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ACB = 50°$.

Zadanie 11 :)
Udowodnij, że w 30-kącie foremnym przekątne A_1A_{19}, A_3A_{24} oraz A_8A_{28} przecinają się w jednym punkcie.




A_1
A_2
A_3
A_4
A_5
A_6
A_7
A_8
A_9
A_{10}
A_{11}
A_{12}
A_{13}
A_{14}
A_{15}
A_{16}
A_{17}
A_{18}
A_{19}
A_{20}
A_{21}
A_{22}
A_{23}
A_{24}
A_{25}
A_{26}
A_{27}
A_{28}
A_{29}
A_{30}