Proserwy – dzień trzeci – geometria

Teoria:
ranek – grupa olimpijska
1) Trochę potrzebnych definicji – wysokość, symetralna, dwusieczna, okrąg wpisany i opisany,
2) Przez 3 punkty zawsze można poprowadzić okrąg :)
3) Przez 4 punkty, tylko jak odpowiednie kąty są ok, czyli pi,
4) Zadanka :)
5) Szczególny przypadek – okrąg opisany na prostokątnym trójkącie,
6) Twierdzenia o stycznych i siecznych,
7) Różne rysunki,
8) Co tam jeszcze do łba przyjdzie :]

Zadanka:
olimpijska – ranek
1) Dany jest trójkąt ostrokątny *ABC*, przy czym $\angle ACB = 60^\circ$. Punkty *D* i *E* są rzutami prostokątnymi odpowiednio punktów *A* i *B* na proste *BC* i *AC*. Punkt *M* jest środkiem boku *AB*. Wykazać, ze trójkąt *DEM* jest równoboczny .
2) Ortocentrum trójkąta, to punkt przecięcia wysokości trójkąta (możesz założyć, że wysokości przecinają się w jednym miejscu). Niech P będzie punktem symetrycznym do ortocentrum ABC względem prostej AB. Udowodnij, że P leży na okręgu opisanym na trójkącie ABC.
3) Niech punkt D będzie punktem przecięcia dwusiecznej kąta C trójkąta ABC z okręgiem opisanym na tym trójkącie oraz niech I będzie środkiem okręgu wpisanego w ABC. Udowodnij, że $|AD|=|ID|=|BD|$, czyli punkty A,B, I leżą na okręgu o środku w D.
4) Ustalone punkty *A* i *B* leżą na prostej *k*. Okręgi *o*1 i *o*2 są styczne zewnętrznie w punkcie *X* (rys. 26). Okręgi te są również styczne do prostej *k* odpowiednio w punktach *A* i *B*. Udowodnić, że wszystkie punkty *X* utworzone przez wszystkie takie okręgi *o1* i *o2* (dla ustalonych *A, B, k*) leżą na jednym okręgu.
5) Udowodnić, że jeżeli E jest punktem przecięcia dwusiecznej poprowadzonej z C w trójkącie ABC z bokiem AB, to $\frac{AC}{BC}=\frac{AE}{CE}$ (tw. o dwusiecznej). Wskazówka: wykorzystaj punkt D z zadania 3. Możesz założyć, że teza tego zadania jest prawdziwa, nawet jeśli jeszcze nie udało Ci się go zrobić :)

średnio-zaawansowana – Tales i działania na kątach
Teoria: tw. Talesa: jeżeli *P* leży na półprostej $\overrightarrow{AC}$, zaś *Q* leży na półprostej $\overrightarrow{AB}$ to mamy $\frac{AP}{AQ}=\frac{AC}{AB}$ wtedy i tylko wtedy gdy $PQ \parallel BC$.
Kąty – wierzchołkowe i naprzemianległe.

Zadania:
1) Punkty *K*, *L*, *M*, *N* są odpowiednio środkami boków *AB*, *BC*, *CD*, *DA* czworokąta wypukłego *ABCD* (rys. 56). Dowieść, że czworokąt *KLMN* jest równoległobokiem.
2) Punkt *P* leży na przekątnej *AC* kwadratu *ABCD*. Punkty *Q* i *R* są rzutami prostokątnymi punktu *P* odpowiednio na proste *CD* i *DA*. Wykazać, ze *BP* =*RQ*.

3) Prostokąt ABCD w którym $|AB| = 3 \cdot |AD|$ podzielono na 3 kwadraty, dzieląc bok AB na trzy równe części punktami E i F. Udowodnić, że $\angle AED + \angle AFD + \angle ABD = 90^\circ$.

wykład i matma olimpijska

1) Niech D, E, F będą środkami boków BC, CA, AB odpowiednio i niech O będzie środkiem okręgu opisanego na ABC. Udowodnij, że O jest ortocentrum trójkąta DEF.
2) Niech dwusieczna kąta C trójkąta ABC przecina okrąg opisany na trójkącie w punkcie D ( $D \neq C$ ). Udowodnij, że D leży na symetralnej boku AB.
3) Niech $H_A, H_B, H_C$ będą rzutami prostokątnymi wierzchołków A, B, C trójkąta ABC na przeciwległe do tych wierzchołków boki i niech H będzie ortocentrum ABC. Wykazać, że H jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt $H_A, H_B, H_C$.
4) Udowodnij tw. o siecznych: jeżeli mamy dany okrąg o i punkt P oraz proste k i l przechodzą przez P i przecinają okrąg o w punktach $K_1, K_2$ , $L_1, L_2$ odpowiednio, to $|PK_1| \cdot |PK_2| = |PL_1| \cdot |PL_2|$. Rozważ wszystkie przypadki.
5) Wywnioskuj, że z poprzedniego zadania wynika, że jeżeli $PR$ jest styczna do okręgu *o* i *R* leży na *o*, to $|PK_1| \cdot |PK_2| = |PR|^2$.
6) Udowodnij, że jeżeli okręgi *o1* i *o2* przecinają się w *A* i B i *P* leży na prostej *AB* oraz prosta *k* przechodząca przez *P* przecina o1 i w punktach $K_1, K_2$, zaś prosta *l* przechodząca przez *P* przecina okrąg *o2* w punktach $L_1, L_2$, to $|PK_1| \cdot |PK_2| = |PL_1| \cdot |PL_2|$. Czy równość ta może zachodzić gdyby *C* nie leżało na *AB*?