Różne geometrie

---

1. Niech BD będzie dwusieczną w trójkącie ABC, przy czym $D \in AC$, oraz M będzie środkiem AC. Prosta BD przecina okrąg opisany na ABC w punkcie $E \neq B$. Okrąg o średnicy DE przecina okrąg opisany na ABC w punkcie $F \neq E$. Udowodnić, że prosta BF jest symetryczna do środkowej BM względem dwusiecznej BD (jest *symedianą*).

2. Okręgi o_1 i o_2 są wzajemnie styczne oraz styczne zewnętrznie do prostej k w punktach A i C. Odcinek AB jest średnicą o_1. Prosta BD jest styczna do o_2 w punkcie D. Udowodnij, że $|BD| = |BA|$.

3. Dane są okręgi $o_1 \neq o_2$ wpisane w kąt. Okrąg o_1 jest styczny do jednego z ramion w punkcie A, okrąg o_2 jest styczny do drugiego z ramion w punkcie B. Prosta AB przecina o_1 w E i o_2 w F. Udowodnić, że $|AE| = |BF|$.

4. Okrąg o środku w I jest wpisany trójkąt ABC i styczny do AB w punkcie D. Okrąg dopisany do boku AB jest styczny do tego boku w E. Udowodnić, że
$$|AD| = |BE|$$

5. Okręgi o_1, o_2 są stycznie wewnętrznie do okręgu o w P i Q odpowiednio. Wspólna styczna zewnętrzna k tych okręgów jest styczna do o_1 w punkcie A zaś do o_2 w B, przy czym P i Q leżą po tej saej stronie prostej k. Udowodnij, że PA, BQ przecinają się na okręgu o.

6. Dany jest trójkąt ABC, punkt O jest środkiem okręgu opisanego, zaś punkt $I \neq O$ jest środkiem okręgu wpisanego. Trzy okręgi o równych promieniach przecinają się w punkcie P, ponadto każdy z nich jest styczny wewnętrznie do dwóch boków trójkąta ABC. Udowodnić, że P, I, O są współliniowe.

7. * (wymaga tylko cierpliwości) Wykazać, że w 30-kącie foremnym $A_1A_2 \ldots A_{30}$ przekątne
$$A_1A_{19}, A_3A_{24}, A_8A_{28}$$
przecinają się w jednym punkcie.

Zadania pochodzą ze Staszica, MIMUWu oraz z rosyjskich olimpiad dla gimnazjalistów