Podstawy geometrii

Dzisiaj postaramy się udowodnić twierdzenia, które zwykle podawane są bez dowodu. Są to dość podstawowe twierdzenia, więc będziemy używać dość skromnych środków dowodowych: podobieństwa trójkątów, równości kątów wierzchołkowych i naprzemianległych, obrotów i symetrii, twierdzenia Talesa.

Przypomnijmy, że już udowodniliśmy (co prawda przy pomocy Pitagorasa), że:

1. **Twierdzenie (Okrąg opisany na trójkącie)** *Istnieje dokładnie jeden okrąg opisany na danym trójkącie ABC. Jego środek jest punktem przecięcia symetralnych boków AB, BC, CA, zwykle oznaczanym O.*
2. **Twierdzenie (Okrąg wpisany)** *Istnieje dokładnie jeden okrąg wpisany w trójkąt ABC. Jego środek jest punktem przecięcia dwusiecznych kątów $\angle CAB, \angle ABC, \angle BCA$, zwykle oznaczanym I.*
3. **Twierdzenie (Istnienie ortocentrum)** *Wysokości w trójkącie przecinają się w jednym punkcie zwanym* ortocentrum *trójkąta, zwykle oznaczanym H.*

Udowodnij:

1. **Twierdzenie (Pitagorasa)** *Jeżeli trójkąt ABC jest prostokątny z przeciwprostokątną AC, to*

$$|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2$$

2. **Twierdzenie (o kącie wpisanym i środkowym)** *Dany jest okrąg o środku w O oraz punkty A, B, C leżące na tym okręgu. Wtedy*

$$\angle AOB = 2\angle ACB$$

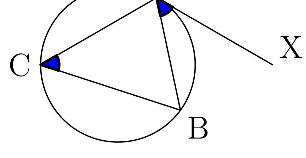
gdzie kąt AOB jest brany odpowiednio – kąt wklęsły jeżeli $\angle ACB > 90°$.

3. **Twierdzenie (Równość kątów wpisanych)** *Punkty A, B, C, D leżą na okręgu, przy czym C i D leżą na tym samym łuku AB. Wtedy*

$$\angle BCA = \angle BDA$$

4. **Twierdzenie (O kącie między styczną a cięciwą)** *Niech prosta AX będzie* styczna *do okręgu o w punkcie A, zaś BA będzie* cięciwą *okręgu o. Jeżeli punkt C leży na okręgu o, przy czym kąty $\angle ACB, \angle XAB$ są oba ostre lub rozwarte, to*

$$\angle ACB = \angle XAB$$



Ten idiotyczny warunek z rozwartością lub ostrością kątów omija przypadek gdy punkt X leży po drugiej stronie A. Można byłoby napisać "jak na rysunku" albo coś równie nieprecyzyjnego.

5. **Twierdzenie** *Na czworokącie wypukłym $ABCD$ można opisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy $\angle ACB = \angle ADB$.*

6. **Twierdzenie** *Na czworokącie wypukłym $ABCD$ można opisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy $\angle ABC + \angle ADC = 180°$.*

7. **Twierdzenie (Istnienie środka masy)** *W trójkącie ABC trzy środkowe tj. proste łączące wierzchołki ze środkami przeciwległych boków przecinają się w jednym punkcie. Ten punkt nazywamy* środkiem masy *trójkąta ABC i oznaczamy M. Punkt M dzieli każdą ze środkowych w stosunku* $2:1$ *licząc od wierzchołka.*

   Oznaczenie tego punktu jako środka masy stanie się naturalniejsze, gdy powiemy więcej o masie.

Uwaga: wszystkie powyższe nazwy są opcjonalne tj. nie będę wymagać ich używania. Tym niemniej są one standardowe i sam będę ich używać.

Zastosowania

1. Udowodnij, że jeśli w trójkącie ABC dwusieczna kąta $\angle CAB$ oraz wysokość opuszczona z wierzchołka A pokrywają się, to trójkąt jest równoramienny.

2. Udowodnij, że jeśli w trójkącie ABC środkowa i wysokość opuszczone z wierzchołka A pokrywają się, to trójkąt jest równoramienny.

3. Środek okręgu opisanego i środek masy trójkąta ABC pokrywają się. Znajdź możliwe wartości miar kątów ABC. Czy umiesz rozwiązać podobne zadanie, jeżeli założymy, że inne z punktów szczególnych (środek okręgu wpisanego, opisanego, ortocentrum, środek masy) pokrywają się?

4. Niech M będzie środkiem masy trójkąta ABC, punkty A_1, B_1, C_1 będą środkami boków BC, CA, AB odpowiednio. Udowodnij, że pola trójkątów $AB_1M, CB_1M, CA_1M, BA_1M, BC_1M, AC_1M$ są równe.