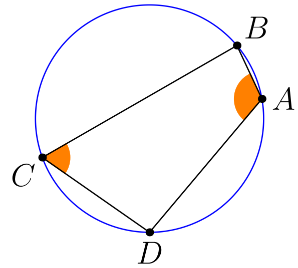
Kąty w okręgu

kółko I LO Białystok
10 stycznia 2012

Twierdzenie 1. *Jeżeli trójkąt ABC jest prostokątny, to środek okręgu opisanego na $\triangle ABC$ leży w połowie przeciwprostokątnej.*

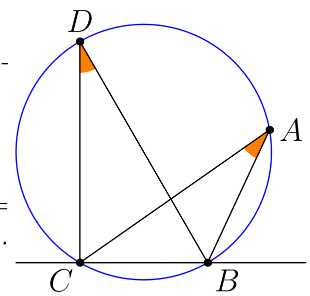
Twierdzenie 2. *Jeżeli czworokąt $ABCD$ jest wypukły i taki, że suma przeciwległych kątów wynosi $180°$, to na $ABCD$ można opisać okrąg (zachodzi również twierdzenie odwrotne).*



Twierdzenie 3. *Jeżeli punkty A, D leżą po tej samej stronie prostej BC i zachodzi*

$$\sphericalangle BAC = \sphericalangle BDC$$

to na $ABCD$ można opisać okrąg.
Najczęściej to twierdzenie stosuje się, gdy $\sphericalangle BAC = \sphericalangle BDC = 90°$, wtedy środek otrzymanego okręgu leży w połowie odcinka BC.



Zadanie 1

Niech AD i BE będą wysokościami w trójkącie ostrokątnym ABC a M będzie środkiem boku AB. Udowodnij, że punkty A, B, D, E leżą na jednym okręgu (gdzie leży jego środek?). Oblicz, ile wynosi kąt $\sphericalangle DMB$, w zależności od $\sphericalangle A, \sphericalangle B, \sphericalangle C$.

Zadanie 2

Dany jest trójkąt ostrokątny ABC, przy czym $\sphericalangle ACB = 60°$. Punkty D i E są rzutami prostokątnymi odpowiednio punktów A i B na proste BC i AC. Punkt M jest środkiem boku AB. Wykaż, że $\triangle DEM$ jest równoboczny.

Zadanie pochodzi ze zbiorku dra Pompe

Zadanie 3

To zadanie ma pokazać, że wysokości w trójkącie przecinają się w jednym punkcie. Punkt przecięcia wysokości nazywamy ortocentrum *trójkąta.*

Niech trójkąt ABC będzie ostrokątny, niech AD i BE będą jego wysokościami i niech proste te przecinają się w H. Niech F oznacza rzut H na AB.

1. Uzasadnij, że na czworokątach $ABDE$ i $CEHD$ można opisać okręgi.
2. Oblicz, że $\sphericalangle CHE = \sphericalangle CDE = \sphericalangle CAB = 180° - \sphericalangle EHF$, stąd punkty C, H, F leżą na jednej prostej.
3. Dokończ rozwiązania zadania.

Zadanie 4

Niech H będzie ortocentrum trójkąta ostrokątnego ABC. Uzasadnij, że punkt symetryczny do H względem boku trójkąta ABC leży na okręgu opisanym na $\triangle ABC$.

Zadanie 5

Wskazać przykład, że warunek "$ABCD$ jest wypukły" w twierdzeniu 2 jest potrzebny oraz że warunek "A, D leżą po tej samej stronie prostej BC" w twierdzeniu 3 jest potrzebny (warunek jest *potrzebny* jeżeli bez tego warunku teza twierdzenia nie jest prawdziwa).