Równania funkcyjne

kółko I LO Białystok

8 stycznia 2012

Funkcje mogą być dowolne. Bardzo dowolne. I bardzo ohydne. Tak, również tak ohydne. Nie muszą być liniowe. Nie muszą być wielomianami. Nie muszą być czymkolwiek ;) Główną metodą rozwiązywania równań funkcyjnych jest podstawianie za zmienne, żeby uzyskać nowe równania, a potem skracanie ze starymi równaniami.

Warto, niezależnie od tego, czy użyje się tego w rozwiązaniu podstawiać (przy założeniu, że równanie uwzględnia zmienne x, y): $x = 0$, $x = y$, $x = f(y)$ itd., żeby skróciło się. Często przydaje się policzenie wartości w konkretnym punkcie np. $f(0)$, co pokazuje trudności. I oczywiście, zawsze warto zgadnąć odpowiedź.

Cześć zadań wzięta z `http://kmo.umcs.lublin.pl/`. Dziękuję!

Zadanie 1 Milusie podstawienia, Śląski konkurs mat.

Funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełnia dla każdej liczby rzeczywistej równość

$$2f(x) + f(1 - x) = 3x.$$

Znajdź wszystkie takie funkcje.

Zadanie 2 Milusie podstawienia, jadziem dalej (i dłużej)

Znajdź wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniające, dla każdych $x, y \in \mathbb{R}$, równanie (są cztery różne podpunkty):

1. $f(x + y) = f(x) - f(y)$,
2. $f(x + y) = f(f(x)) + y$,
3. $xf(x) + yf(y) = (x + y)f(x)f(y)$,
4. $f(y)f(x) - xy = f(x) + f(y) - 1$.

Zadanie 3 Funkcje na wymiernych

Funkcja $f : \mathbb{R} \in \mathbb{R}$ spełnia warunki

1. $f(x + y) = f(x) + f(y)$ dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$,
2. $f(1) = 1$.

Wyznacz $f(9/32)$.

Zadanie 4 Ograniczoność

Znajdź wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bezwzględnie ograniczone (*tzn. takie, że istnieje stała C_f taka, że* $\forall_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| \leqslant C_f$) i spełniające, dla wszystkich rzeczywistych x, y, równanie $f(x + y) = f(x) + f(y)$.

Zadanie 5 Paskudne dziedziny

Wyznaczyć wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \setminus \{0, 1\} \to \mathbb{R}$ spełniające równanie

$$f(x) + f\left(\frac{x-1}{x}\right) = 1 + x \qquad \text{dla każdego } x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}.$$

Zadanie 6 Monotoniczność, z LXI OM

Wyznaczyć wszystkie takie funkcje monotoniczne $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, że dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$ zachodzi równość

$$f\left(f(x) - y\right) + f(x + y) = 0.$$

Zadanie 7

Rozwiązać w liczbach rzeczywistych x, y, z układ równań

$$\begin{cases} x^2 - (y + z + yz)x + (y + z)yz = 0 \\ y^2 - (z + x + zx)y + (z + x)zx = 0 \\ z^2 - (x + y + xy)z + (x + y)xy = 0. \end{cases}$$

Zadanie 8

W pięciokącie wypukłym $ABCDE$ wszystkie kąty wewnętrzne mają równe miary. Wykazać, że symetralna odcinka EA, symetralna odcinka BC i dwusieczna kąta CDE przecinają się w jednym punkcie.