Fibonacci II

kółko I LO Białystok
12 marca 2012

Definicja 1.1. *Ciąg Fibonacciego to ciąg zadany równaniami*

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1 \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \text{ dla } n \geqslant 2.$$

ta definicja jest równoważna

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (\varphi_1^n - \varphi_2^n) = \frac{\varphi_1^n - \varphi_2^n}{\varphi_1 - \varphi_2},$$

gdzie $\varphi_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} > \varphi_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ *są pierwiastkami równania* $x^2 = x + 1$.

1.1 Zadania indukcyjne na Fiba (z poprzedniego kółka)

Zadanie 1
Niech n, k będą liczbami naturalnymi. Uzasadnij, że $F_{n+1}F_k + F_nF_{k-1} = F_{n+k}$.

Zadanie 2
Niech n będzie liczbą naturalną. Uzasadnij, że $F_1 + F_3 + F_5 + \ldots + F_{2n-1} = F_{2n}$.

Zadanie 3
Niech n będzie liczbą naturalną. Uzasadnij, że $F_0 + F_1 + \ldots + F_n = F_{n+2} - 1$.

Zadanie 4
Niech n będzie liczbą naturalną. Udowodnij, że $\sum_{i=1}^{n} iF_i = nF_{n+2} - F_{n+3} + 2$.

Zadanie 5
Niech n będzie liczbą naturalną. Udowodnij, że $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$.

Zadanie 6
Uzasadnij, że jeżeli $r \big| n$ są liczbami naturalnymi, to $F_r \big| F_n$.

Zadanie ⋆ 7
Uzasadnij, że jeżeli m, n są liczbami naturalnymi, to $NWD(F_n, F_m) = F_{NWD(n,m)}$.

Zadanie ⋆ 8
Udowodnij tożsamość

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} F_k = F_{2n}.$$

Wskazówka: jeżeli robisz algebraicznie, to pamiętaj, że $\varphi_i^2 = \varphi_i + 1$.

1.2 Ciągi rekurencyjne i macierze, paragraf dla niezainteresowanych poprzednim.

Zadanie z ⋆ 9
Ciąg a_n zadany jest wzorem $a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n$. Oblicz, jaki jest *wzór ogólny* (tzn. wzór nierekurencyjny, zależny tylko od n) tego ciągu, jeżeli

1. $a_0 = 1, a_1 = 2$,
2. $a_0 = 1, a_1 = 1$,
3. $a_0 = 3, a_1 = 5$.

Ten margines jest zbyt wąski, żeby zmieścić teorię z poprzedniego kółka dotyczącą macierzy.

Zadanie z ⋆ 10
Sprawdź, jak mnożymy macierze, korzystając ze wskazówek Yogiego na tablicy.

Zadanie ⋆⋆⋆ 11
Połóżmy $\mathbb{F} := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, wtedy $\mathbb{F}^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}$ dla $n > 0$.

Spróbuj udowodnić wzór $F_{n+1}F_k + F_nF_{k-1} = F_{n+k}$ korzystając ze wzoru $\mathbb{F}^n \cdot \mathbb{F}^k = \mathbb{F}^{n+k}$.

Spróbuj udowodnić wzór $F_0 + F_1 + \ldots + F_n = F_{n+2} - 1$ korzystając ze wzoru $I + \mathbb{F} + \ldots + \mathbb{F}^n = \frac{\mathbb{F}^{n+1} - I}{\mathbb{F} - I}$ i tego, że $1/(\mathbb{F} - I) = \mathbb{F}$.