



Fibonacci i rekurencja

KÓŁKO I LO BIAŁYSTOK
5 MARCA 2012

1.1 Teoria 1

Definicja 1.1. Ciąg Fibonacciego to ciąg zadany równaniami

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1 \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \text{ dla } n \geq 2.$$

1.2 Zadania indukcyjne ważne i proste

W zasadzie zadania są na mądrą indukcję.

ZADANIE 1

Na ile sposobów da się pokryć prostokąt $2 \times n$ klockami 1×2 ?

ZADANIE 2

Udowodnij, że $NWD(F_n, F_{n+1}) = 1$ dla każdego naturalnego n .

ZADANIE 3

Niech n, k będą liczbami naturalnymi. Uzasadnij, że $F_{n+1}F_k + F_nF_{k-1} = F_{n+k}$.

1.3 i indukcyjne proste i ważne

ZADANIE 4

Niech n będzie liczbą naturalną. Uzasadnij, że $F_1 + F_3 + F_5 + \dots + F_{2n-1} = F_{2n}$.

ZADANIE 5

Niech n będzie liczbą naturalną. Uzasadnij, że $F_0 + F_1 + \dots + F_n = F_{n+2} - 1$.

ZADANIE 6

Niech n będzie liczbą naturalną. Udowodnij, że $\sum_{i=1}^n iF_i = nF_{n+2} - F_{n+3} + 2$.

ZADANIE 7

Niech n będzie liczbą naturalną. Udowodnij, że $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$.

1.4 Teoria 2

Ciąg jest na tyle prosty, że spotyka się go wszędzie. A jak można liczyć wartości? Po kolei — trochę wolno. Można też skorzystać ze wzoru

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (\varphi_1^n - \varphi_2^n) = \frac{\varphi_1^n - \varphi_2^n}{\varphi_1 - \varphi_2},$$

gdzie $\varphi_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} > \varphi_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ są pierwiastkami równania $x^2 = x + 1$.

1.5 Zadania trudniejsze

ZADANIE 8

Uzasadnij, że jeżeli $r|n$ są liczbami naturalnymi, to $F_r|F_n$.

ZADANIE 9

Uzasadnij, że jeżeli m, n są liczbami naturalnymi, to $NWD(F_n, F_m) = F_{NWD(n,m)}$.

ZADANIE 10

Udowodnij tożsamość

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} F_k = F_{2n}.$$

Wskazówka: jeżeli robisz algebraicznie, to pamiętaj, że $\varphi_i^2 = \varphi_i + 1$.