Ferie minęły, ale nie chodzimy do szkoły — dziwne.

1.1 TL

1. Niech $a_1, \dots, a_{2n}$ będą różnymi liczbami całkowitymi takimi, że równanie
$$(x - a_1)\dots(x - a_{2n}) - (-1)^n (n!)^2 = 0.$$
ma pierwiastek całkowity r. Uzasadnij, że $r = \frac{a_1 + \dots + a_{2n}}{2n}$.

2. Liczby a, b są takie, że
$$a \Big| b^2 \Big| a^3 \Big| b^4 \Big| a^5 \Big| b^6 \Big| \dots$$
Udowodnij, że $a = b$.

3. Udowodnij, że ciąg liczb naturalnych $a_n = n + \left\lfloor \sqrt{n} + \frac{1}{2} \right\rfloor$ zawiera wszystkie liczby naturalne nie będące kwadratami i tylko te ($\lfloor x \rfloor$ to podłoga z liczby x).

4. Niech p, q – względnie pierwsze liczby naturalne. Udowodnij, że
$$\left\lfloor \frac{p}{q} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2p}{q} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{(q-1)p}{q} \right\rfloor = \frac{(p-1)(q-1)}{2}.$$

5. Dla n naturalnego niech $F_n = 2^{2^n} + 1$. Udowodnij, że jeżeli $n \neq m$ to $NWD(F_n, F_m) = 1$.

6. Ile jest rozwiązań równania Pitagorasa $\mod p$, gdzie p jest pierwsze? Formalniej: ile jest takich trójek (a, b, c) reszt $\mod p$, że $a^2 + b^2 \equiv c^2 \mod p$? Odpowiedź powinna zależeć wyłącznie od p.

7. **Twierdzenie** *Udowodnij, że aby liczba pierwsza była doskonała, potrzeba i wystarcza, by była ona postaci* $2^{s-1}(2^s - 1)$, *gdzie* $2^s - 1$ *jest liczbą pierwszą.*

   (a) Sprawdź, że każda liczba postaci z zadania jest doskonała.

   (b) Niech $\sigma(x)$ oznacza sumę dzielników liczby x, niech n będzie liczbą doskonałą parzystą. Oblicz $\sigma(n)$ w zależności od n. Uzasadnij, że jeżeli a i b są względnie pierwsze to $\sigma(a)\sigma(b) = \sigma(ab)$.

   (c) Niech $n = 2^{s-1} l$, gdzie $2 \nmid l$, uzasadnij, że $2^s \big| \sigma(l)$ i że $\sigma(l) = q + l$.

   (d) Wywnioskuj, że l jest pierwsza i równa $2^s - 1$ i zakończ tym samym dowód.

1.2 Nietrudne stereo

1. Dany jest równoległościan $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Przekątna AC_1 przecina płaszczyznę A_1BD w M. Udowodnić, że $AM = \frac{1}{3}AC_1$.

2. **Twierdzenie (O trzech prostopadłych)** *Prosta* l *nie jest prostopadła po płaszczyzny* π. *Niech* l' *będzie rzutem* l *na* π *i niech* l_1 *będzie dowolną prostą zawartą w* π. *Udowodnij, że* $l_1 \perp l$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* $l_1 \perp l'$.

3. Krawędź AD czworościanu $ABCD$ jest prostopadła do ABC. Uzasadnij, że rzut na BCD ortocentrum trójkąta ABC to ortocentrum trójkąta BCD.