Fermaty

kółko I LO Białystok
12 marca 2013

1.1 Zadania z polibudki

Zadanie 1
Udowodnij, że jeżeli n jest liczbą całkowitą, to $30|n^5 - n$.

Zadanie 2
Niech $n \geqslant 1$ będzie liczbą naturalną, zaś $x_1, x_2, \ldots, x_n$ liczbami całkowitymi, których suma dzieli się przez 10. Udowodnić, że liczba

$$x_1^5 + x_2^5 + \ldots + x_n^5$$

jest również podzielna przez 10.

Zadanie 3
Wykazać, że jeżeli x i y są liczbami całkowitymi, to liczba $xy^5 - x^5y$ jest podzielna przez 30.

Zadanie 4
Wykazać, że jeśli $p_1, p_2, \ldots, p_{56}$ są liczbami pierwszymi większymi od 7, to liczba

$$p_1^6 + \ldots + p_{56}^6$$

jest podzielna przez 56.

1.2 Zadania prawie na Fermata

Zadanie 5
Dowiedź, że jeżeli p jest liczbą pierwszą większą od 3, to $43 \Big| 7^p - 6^p - 1$.

Zadanie 6 Twierdzenie Eulera
Liczby całkowite a i n są względnie pierwsze. Uzasadnij, że $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \mod n$, gdzie $\varphi(n)$ oznacza liczbę elementów zbioru $\{a \mid a \in \{1, 2, \ldots, n\}, NWD(n, a) = 1\}$.

Zadanie 7
Niech a, b będą względnie pierwszymi liczbami całkowitymi dodatnimi. Udowodnij, że istnieją liczby całkowite dodatnie m, n, takie, że

$$ab \Big| a^m + b^n - 1.$$

Zadanie 8
Liczby całkowite a, b, c sumują się do zera. Rozstrzygnij, czy $a^{61} + b^{61} + c^{61}$ może być liczbą pierwszą.