Mało zadań z małego twierdzenia Fermata

Teoria

1. **Twierdzenie (Małe twierdzenie Fermata)** *Jeżeli p jest liczbą pierwszą, zaś a jest liczbą całkowitą niepodzielną przez p, to*
$$a^{p-1} \equiv 1 \mod p.$$

2. **Twierdzenie (Małe twierdzenie Fermata, równoważnie)** *Jeżeli p jest liczbą pierwszą, zaś a jest liczbą całkowitą, to*
$$a^p \equiv a \mod p.$$
Wypadł tutaj warunek $p \nmid a$.

3. **Definicja** *Liczbę takich $a \in \{1, 2, \dots, n\}$, że a jest względnie pierwsze z n, oznaczam jako $\phi(n)$.*

   Uwaga: Załóżmy, że $n = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}$ jest rozkładem liczby n na czynniki pierwsze. Wtedy
$$\phi(n) = (p_1^{a_1} - p_1^{a_1-1})(p_2^{a_2} - p_2^{a_2-1}) \dots (p_n^{a_n} - p_n^{a_n-1}).$$
Np. $\phi(12) = \phi(2^2 \cdot 3) = (2^2 - 2)(3 - 1) = 4$. Faktycznie liczby względnie pierwsze z 12 i nie większe od 12 to liczby $1, 5, 7, 11$.

4. **Twierdzenie (Eulera)** *Niech n będzie liczbą naturalną, zaś a liczbą całkowitą względnie pierwszą z n tj. $NWD(a, n) = 1$. Wtedy*
$$a^{\phi(n)} \equiv 1 \mod n,$$
gdzie $\phi(n)$ jest zdefiniowane jak wyżej.

Dowody teorii

1. Niech p będzie liczbą pierwszą, zaś a będzie liczbą niepodzielną przez p.
   (a) Dowiedź, że jeżeli $k, l \in \mathbb{Z}$ są takie, że
$$ka \equiv la \mod p$$
   to $k \equiv l \mod p$.
   (b) Uzasadnij, że
$$\{a \mod p, 2a \mod p, \dots, (p-1)a \mod p\} = \{1, 2, \dots, p-1\}$$
   gdzie $x \mod p$ oznacza resztę z dzielenia x przez p.
   (c) Pokaż, że zachodzi
$$a \cdot 2a \cdot 3a \cdot \dots \cdot (p-1)a \equiv (p-1)! \mod p.$$
   (d) Udowodnij małe twierdzenie Fermata (w 1. wersji).
   (e) Udowodnij, że obie wersje małego twierdzenia Fermata są równoważne.

2. Rozszerz powyższy dowód twierdzenia Fermata do dowodu twierdzenia Eulera.

   Wskazówka: Jaki zbiór należy wziąć zamiast $\{a \mod p, 2a \mod p, \dots, (p-1)a \mod p\}$?

3. Uzasadnij, że z twierdzenia Eulera wynika małe twierdzenie Fermata.

Zadania

1. Udowodnij, że jeżeli n jest liczbą całkowitą, to
$$30|n^5 - n$$
2. Niech $n \geq 1$ będzie liczbą naturalną, zaś $x_1, x_2, \ldots, x_n$ liczbami całkowitymi, których suma dzieli się przez 10. Udowodnić, że liczba
$$x_1^5 + x_2^5 + \cdots + x_n^5$$
jest również podzielna przez 10.

   Źródło: PTM 2009, kl. I
3. Wykazać, że jeżeli x i y są liczbami całkowitymi, to liczba
$$xy^5 - x^5y$$
jest podzielna przez 30.

   Źródło: PTM 2007, kl. I
4. Wykazać, że jeśli $p_1, p_2, \ldots, p_{56}$ są liczbami pierwszymi większymi od 7, to liczba
$$p_1^6 + \cdots + p_{56}^6$$
jest podzielna przez 56.

   Źródło: PTM 2005, kl. II

   Uwaga: Przy dowodzeniu podzielności przez 8 być może trzeba coś policzyć.