Wspominki po finale

1.1 Małe twierdzenie Fermata, twierdzenie Lagrange

1. Znajdź wszystkie liczby pierwsze p, takie, że

$$p|\underbrace{11\ldots1}_{p}$$

Źródło: H. Pawłowski

2. Liczba pierwsza p jest postaci $5k+2$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$. Uzasadnić, że

$$a^5 \equiv b^5 \mod p \Rightarrow a \equiv b \mod p$$

3. Wyznaczyć najmniejszą taką liczbę pierwszą p, że liczba

$$2^{120!}-1$$

jest podzielna przez p i nie jest podzielna przez p^2.
Źródło: Zwardoń 2007

4. Niech $p \geq 5$ będzie liczbą pierwszą. Udowodnij, że istnieje takie n naturalne, że

$$p|2^n+3^n+6^n-1$$

Wskazówka: zgadnij to n :)
Źródło: Mathlinks

5. Niech $a, b, c \in \mathbb{Z}$ będą takie, że $a+b+c=0$. Rozstrzygnij, czy $a^{61}+b^{61}+c^{61}$ może być liczbą pierwszą.
Źródło: Mathlinks

1.2 Reszty kwadratowe – teoria

We wszystkich poniższych zadaniach dana jest liczba pierwsza $p > 2$.

Definicja *Liczbę a nazywamy resztą kwadratową $\mod p$, jeżeli istnieje takie $b \in \mathbb{Z}$, że $a \equiv b^2 \mod p$.*

1. (a) Uzasadnij, że jeżeli $k^2 \equiv l^2 \mod p$, to

$$k \equiv l \mod p \text{ lub } k \equiv -l \mod p$$

   (b) Oblicz ile jest reszt kwadratowych $\mod p$.

   (c) Udowodnij, że liczba a jest resztą kwadratową $\mod p$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \mod p$$

   (d) Stwierdź, które liczby są resztami kwadratowymi $\mod 11$, a które $\mod 13$. Spróbuj znaleźć pewne prawidłowości w obu przypadkach, udowodnij je.