Estońska OM

Łatwiejsze

1. Jogi, zdenerwowany niską frekwencją oddawania prac domowych, wymyślił sadystyczne zadanie: Wybrać zbiór A dzielników $2009^{2009^{2009}}$, taki, że jeżeli $a, b \in A$ to $a \not| b$.
   Ile maksymalnie elementów może mieć zbiór A?

2. Dany jest trójkąt ABC. Wysokość opuszczona z wierzchołka A na BC jest styczna do okręgu opisanego na ABC. Udowodnić, że miara pewnego kąta trójkąta ABC leży w przedziale $(90°, 135°)$.

3. Dany jest trójkąt ABC. Wysokości opuszczone z wierzchołka A na BC i z wierzchołka B na AC są styczne do okręgu opisanego na ABC. Znaleźć miary kątów $\triangle ABC$.

4. Punkty E, D leżą odpowiednio na bokach AC, BC trójkąta ABC, przy czym zachodzi $2|CE| = |AE|$ oraz $2|CD| = |BD|$. Na zewnątrz trójkąta ABC wybieramy na półprostych AD, BE punkty K, L tak, że $2|KD| = |AD|$ i $2|LE| = |BE|$. Udowodnić, że $ABKL$ jest równoległobokiem.

"Nietrudniejsze"

1. Dany jest trójkąt ABC. Prosta y przechodzi przez B i jest prostopadła do AB, prosta z przechodzi przez C i jest prostopadła do AC, prosta x jest wysokością opuszczoną z A w trójkącie ABC. Udowodnić, że x, y, z mają wspólny punkt wtedy i tylko wtedy, gdy $|AB| = |AC|$.

2. Znajdź wszystkie liczby całkowite dodatnie n, takie, że istnieje dokładnie $2n$ par liczb całkowitych (a, b) takich, że $1 \leq a < b \leq n$ oraz $a|b$.

3. Łysy i Staniek grają w grę na planszy w kształcie prostokąta o wymiarach $2 \times n$, którego boki o długości 2 są sklejone, tak że prostokąt tworzy powierzchnię boczną walca. Gracze wykonują ruchy na przemian, wycinając jednostkowy kwadracik z planszy. Gracz przegrywa, jeżeli po jego ruchu plansza traci kołową spójność, tj. można ja rozłożyć na płaszczyźnie. Jednostkowe kwadraty, które mają jedynie narożnik wspólny są uważane za niepołączone. Załóżmy, że Łysy zaczyna. Który z graczy ma strategię wygrywającą?

Zadania pochodzą z Estońskiej Olimpiady Matematycznej