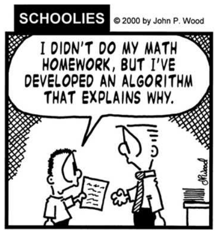

Przed PTMem

czyli i tak zrobimy tę pracę domową!

1.1 Zadania dla klas pierwszych

1. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$. Punkty P, Q, R, S są punktami przecięcia dwusiecznych kątów zewnętrznych czworokąta $ABCD$. Udowodnij, że na czworokącie $PQRS$ można opisać okrąg.

2. Okręgi o_1 i o_2 są styczne zewnętrznie w punkcie B oraz styczne do prostej k w punktach A i C odpowiednio. Wykaż, że $\sphericalangle ABC = 90^\circ$.

3. Rozstrzygnij, czy równanie $x^2 + y^2 + z^2 = t^2$ ma rozwiązanie w liczbach całkowitych **dodatnich** x, y, z, t.

4. * Niech $C_n := 2^{2^n} - 1, F_n := 2^{2^n} + 1$. Uzasadnij, że:

   (a) jeżeli $m \leqslant n$ to $C_m \Big| C_n$.

   (b) dla każdego m zachodzi $F_m \Big| C_{m+1}$, a więc jeżeli $m < n$ to $F_m \Big| C_n$.

   (c) Liczby F_n i F_m są względnie pierwsze dla $m \neq n$.

5. Eliminacje do konkursu matematycznego składały się z trzech zadań punktowanych w skali $0, 2, 5, 6$. W eliminacjach wystartowało 18 zawodników. Udowodnij, że pewne dwie osoby uzyskały ten sam wynik. Czy liczbę 18 z treści zadania można zastąpić mniejszą tak by teza nadal zachodziła?

6. Liczby $a_1, \ldots, a_{2011}$ są permutacją liczb $1, 2, \ldots, 2011$. Uzasadnij, że iloczyn $(a_1 - 1)(a_2 - 2) \ldots (a_{2011} - 2011)$ jest parzysty.

1.2 Zadania dla klas drugich

1. Niech a i b będą względnie pierwszymi liczbami naturalnymi. Liczbę naturalną n nazwiemy *dobrą*, jeżeli istnieją takie liczby całkowite <u>nieujemne</u> x, y, że $n = ax + by$.

   (a) Udowodnić, że liczba $n_0 = (a-1)(b-1) - 1$ nie jest dobra,

   (b) a $n_0 + 1$ i każda większa jest dobra.

2. Niech p będzie nieparzystą liczbą pierwszą.

   (a) Uzasadnij, że liczba a jest resztą kwadratową $\mod p$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \mod p$.

   (b) Uzasadnij, że jeśli g jest generatorem $\mod p$ i a nie jest resztą kwadratową $\mod p$, to $(ag)^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \mod p$ i w związku z tym ag nie jest generatorem $\mod p$.

3. Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg. Punkt M jest środkiem przekątnej AC i $\sphericalangle AMB = \sphericalangle AMD$. Wykazać, że $MA^2 = MB \cdot MD$.

4. Dany jest okrąg o oraz punkty A i B. Skonstruować okrąg styczny do okręgu o, przechodzący przez punkty A i B.

5. Okręgi o_1 i o_2 są styczne zewnętrznie w punkcie A. Wspólna styczna zewnętrzna tych okręgów przecina prostą łączącą ich środki w punkcie S. Prosta przechodząca przez S przecina okręgi o_1 i o_2 kolejno w punktach B, C, D, E. Wykazać, że kąt $\sphericalangle BAD$ jest prosty.