Dirichlet

Teoria:

1. Dirichlet jest wszędzie, nawet tam, gdzie się go nie spodziewasz... Bądź ostrożny, żeby Cię nie dopadł :)
2. **Twierdzenie 1.1 (Zasada szufladkowa, Dirichleta, gniazd gołębich ...)** *Jeżeli mamy $n+1$ przedmiotów i n szufladek i wkładamy przedmioty do szufladek, to w pewnej szufladce będą 2 przedmioty.*
3. Inne często używane sformułowanie: Jeżeli mamy n przedmiotów i n szufladek i wkładamy przedmioty do szufladek tak, że w żadnej szufladce nie ma więcej niż jednego przedmiotu, to **każda** szufladka jest niepusta.

Zadanka normalne

1. Danych jest 6 punktów o współrzędnych całkowitych na płaszczyźnie. Udowodnić, że środek pewnego odcinka o końcach w tych punktach ma współrzędne całkowite.
2. Uzasadnij, że wśród sieściu osób są trzy, z których każde dwie znają się, lub trzy, z których żadne dwie nie znają się.
3. Udowodnij, że wśród dowolnych $n+1$ liczb całkowitych istnieją dwie, których reszty z dzielenia przez n są równe.
4. W turnieju szachowym startuje $n \geq 2$ zawodników. Każda para rozgrywa dokładnie jeden mecz. Udowodnić, że w każdej chwili turnieju istnieje 2 graczy, którzy rozegrali (do końca) po tyle samo partii.
5. Niech $n \in \mathbb{Z}$ i niech $a_1, a_2, \cdots, a_n$ będą liczbami całkowitymi. Udowodnij, że istnieją takie $1 \leq k \leq l \leq n$, że $a_k + a_{k+1} + \cdots + a_l$ jest podzielne przez n.
6. Udowodnij „słabsze twierdzenie Fermata": dla danej liczby pierwszej p i dodatniej liczby a istnieje takie n, $2 \leq n \leq p+1$, że $p|a^n - a$.

   A czy istnieje takie n wśród liczb $\{2, 3, \cdots, p\}$?

Poziom pro

1. Uzasadnij, że istnieje liczba złożona (w zapisie dziesiętnym) z cyfr $0, 9$ i podzielna przez 123456789.
2. Pomiędzy każdymi z dwoma z 17 planet istnieje połączenie hiperprzestrzenne. Połączenia są obsługiwane przez firmy: "UFO ltd.", "NASA shuttle", "Overlord transport". Uzasadnić, że pomiędzy pewnymi trzema planetami **wszystkie** połączeniami są obsługiwane przez tę samą firmę.

Master class

1. Dla dowolnej liczby naturalnej n względnie pierwszej z 10 udowodnij, że istnieje liczba podzielna przez n mająca w zapisie po tyle samo cyfr $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$.
2. Jocz przygotowuje się do OI. Załatwił sobie zwolnienie na 11 tygodni (!!!). W tym czasie zamierza dziennie robić co najmniej 1 zadanko, ale w każdym pełnym tygodniu nie zrobić więcej niż 12 zadanek (żeby się nie przemęczać). Udowodnij, że istnieją takie a, b, że od dnia a do dnia b (włącznie) Jocz rozwiązał dokładnie 21 zadań.