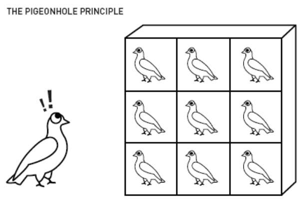

W ciągu n kółek są dwa mówiące o tym samym, czyli

Dirichlet!

Twierdzenie (Zasada szufladkowa Dirichleta) *Jeżeli $kn+1$ przedmiotów wkładamy do n szufladek, to w przynajmniej jednej szufladce będzie przynajmniej $k+1$ przedmiotów.*

1.1 Prostsze

1. Zadanie
   200 różnych punktów zostało wybranych na okręgu tak, że kąt środkowy oparty na dowolnych dwóch z nich ma całkowitą ilość stopni. Dowiedź, że wśród nich istnieją punkty antypodyczne (tzn. symetrycznie względem środka okręgu).

2. Zadanie
   Pokaż, że istnieją dwie różne potęgi 3, których różnica jest podzielna przez 2010.

3. Zadanie
   Liczby $1, 2, 3, \ldots, 10$ zostały umieszczone w pewnym porządku na okręgu. Udowodnij, że istnieją 3 kolejne liczby, których suma jest nie mniejsza niż 17.

4. Zadanie
   Dany jest zbiór 2011 punktów na płaszczyźnie. Z każdej trójki punktów da się wybrać dwa odległe od siebie o mniej niż 1 stańkometr. Udowodnij, że pewne 1006 punktów leży w pewnym kole o promieniu 1 stańkometra.

5. Zadanie
   Wykaż, że w dowolnym wielościanie istnieją dwie ściany o tej samej liczbie krawędzi.

1.2 Średnie i trudniejsze

1. Zadanie
   Resztka teorii liczb – fakt potrzebny do rozwiązania zadania z poprzedniego kółka.

   Niech $a, b \in \mathbb{Z}$, niech liczba d będzie całkowita. Udowodnij, że następujące warunki są równoważne:

   (a) $NWD(a,b) \Big| d$.

   (b) Istnieją liczby $x, y \in \mathbb{Z}$, takie, że
   $$ax + by = d.$$

   Wskazówki:

   (a) Wykaż, że $(b) \Rightarrow (a)$.

   (b) $(a) \Rightarrow (b)$.
   Załóż, że $NWD(a,b) = 1$.
   Z twierdzenia chińskiego o resztach wynika, że istnieją:
   $$A : A \equiv 0 \mod a,\ A \equiv 1 \mod b,$$
   $$B : B \equiv 1 \mod a,\ B \equiv 0 \mod b.$$
   Oczywiście $A + B \equiv 1 \mod a$ i $A + B \equiv 1 \mod b$. Uzasadnij, że $A + B \equiv 1 \mod ab$.
   Zauważ, że stąd wynika przedstawienie $1 = ax + by$ dla pewnych $x, y \in \mathbb{Z}$, a przez domnożenie — przedstawienie dowolnej liczby naturalnej w tej postaci.

   (c) Udowodnij twierdzenie w ogólnej postaci, bez założenia $NWD(a,b) = 1$.
   Wskazówka: Podziel przez $NWD(a,b)$.

2. ZADANIE
W ILO powołano komitety wyborcze. Każdy komitet skupia ponad połowę uczniów. Udowodnić, że istnieje uczeń, który należy do ponad połowy komitetów.

3. ZADANIE
Każdy punkt płaszczyzny malujemy na sebowo lub hubowo. Udowodnić, że istnieje prostokąt o osiach równoległych do układu współrzędnych, którego wszystkie wierzchołki są tego samego koloru.

4. ZADANIE
Yogi zjada co najmniej jeden piknik dziennie. Jeżeli przez ostatni miesiąc (30 dni) zjadł on 45 pikników udowodnij, że od pewnego dnia A do dnia B zjadł dokładnie 14 pikników.

5. ZADANIE
Oznaczam $\{x\}$ część ułamkową liczby x, tzn. taką liczbę $r \in [0, 1)$, że $x - r$ jest całkowita. Np. $\{3.5\} = 0.5$, $\{-1.2\} = 0.8$.

Niech α będzie liczbą niewymierną. Udowodnić, że w dowolnym przedziale $(a, b) \subseteq [0, 1)$, $(a < b)$ istnieje nieskończenie wiele liczb postaci $\{n\alpha\}\,(*)$ dla $n \in \mathbb{N}$.

Wskazówki:

(a) Weź liczby $\{\alpha\}, \{2\alpha\}, \{3\alpha\}, \cdots, \{n\alpha\}, \{(n+1)\alpha\}$, udowodnij, że dwie różne z nich leżą w odległości nie większej niż $1/n$, stwierdź że wobec tego istnieje liczba postaci * w przedziale $(0, \frac{1}{n})$ lub w przedziale $(1 - \frac{1}{n}, 1)$. Udowodnij, że jeżeli istnieje liczba w przedziale $(1 - \frac{1}{n}, 1)$ to i w $(0, \frac{1}{n})$, zatem zawsze istnieje liczba w $(0, \frac{1}{n})$.

(b) Obierz dowolne $0 < a < b < 1, k \in \mathbb{N}$ i udowodnij, że w przedziale (a, b) leży co najmniej k różnych liczb postaci *, biorąc wielokrotności liczby otrzymanej powyżej.

6. * ZADANIE
Uzasadnij, że dla dowolnej liczby A istnieje takie n, że 2^n rozpoczyna się od cyfr z liczby A np. dla $A = 13$ mamy $2^{17} = 131072$, dla $A = 1811$ mamy $2^{1901} = \underbrace{1811430839172\ldots}_{573 \text{ cyfry}}$, jak widać te liczby nie muszą być zbyt małe :P

Wskazówka: rozważ $n \log_{10} 2 = \log_{10} 2^n$ *i* $\log_{10} A$, *gdzie* $\log_{10} x$ *to taka liczba rzeczywista, że* $10^{\log_{10} x} = x$ *(żadnych strasznych własności logarytmów nie potrzeba znać).*