Diofantyczne

kółko I LO Białystok
5 marca 2013

Potrzebna teoria ogranicza się do kongruencji i jest zawarta w 123∞.

Zestaw pierwszy, z sosem łagodnym

Zadanie 1
Niech x, y, z będą liczbami całkowitymi. Wykaż, że jeżeli $7 \big| x^3 + y^3 + z^3$, to $7 \big| xyz$.

Zadanie 2
Wykaż, że jeżeli liczby całkowite x, y, z są takie, że $8 \big| x^2 + y^2 + z^2 - 2$, to któraś z liczb x, y, z jest podzielna przez 4.

Zadanie 3 Z 123∞
Pokaż, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n liczba $2^{4^n} + 5$ jest podzielna przez 21.

Zestaw drugi, ostrzejszy

Zadanie 4
Znajdź liczby całkowite n będące rozwiązaniami równania

$$25^n + 4^n + 1 = 10^n + 5^n + 2^n.$$

Zadanie 5
Rozwiąż w liczbach całkowitych φ, ψ równanie $\varphi^2 + \varphi \cdot \psi + \psi^2 = 7$.

Zestaw trzeci, ostry

Zadanie 6
Znajdź wszystkie rozwiązania równania $15A^2 - 7B^2 = 9$ w liczbach całkowitych A, B.

Zadanie 7
Znajdź wszystkie rozwiązania równania $5b^3 + 11o^3 + 13k^3 = 0$ w liczbach całkowitych b, o, k.

Zadanie 8 Rozwiązania równania Pella, zadanie teoretyczne
Chcemy pokazać, że równanie $x^2 - 2y^2 = 1$ ma nieskończenie wiele rozwiązań w liczbach całkowitych.

1. Znajdź jedno rozwiązanie (x_0, y_0) tego równania. Zauważ, że równanie można zapisać jako

$$(x_0 - y_0\sqrt{2})(x_0 + y_0\sqrt{2}) = 1.$$

2. Zapisz liczbę $(x_0 + y_0\sqrt{2})^2$ jako $x_1 + y_1\sqrt{2}$, uzasadnij, że (x_1, y_1) jest również rozwiązaniem równania,
3. Uzasadnij tezę zadania.