Zadania z Delty

Joachim Jelisiejew

22–29 listopada 2011

Zadania są przeznaczone dla obu grup, choć ostatnie dwa, a zwłaszcza ostatnie, będą dla młodszych bardzo trudne.

Zadanie 1
Dane są liczby rzeczywiste $a \geqslant 1, b \geqslant 2, c \geqslant 3$. Uzasadnij, że $abc \geqslant a + b + c$.

Zadanie 2
Dany jest trójkąt ABC, w którym $AB = AC$ oraz $\sphericalangle BAC = 90°$. Punkty D i E leżą odpowiednio na bokach AB i AC, przy czym $|AD| = |CE|$. Prosta przechodząca przez punkt A i prostopadła do prostej DE przecina prostą BC w punkcie P. Wykaż, że $|AP| = |DE|$.

Zadanie 3
W czworokącie wypukłym $ABCD$ przekątne AC i BD są równej długości. Punkty M i N są odpowiednio środkami boków AD i BC. Wykaż, że prosta MN tworzy równe kąty z przekątnymi.

Zadanie 4
Czy liczbę 2^{2005} da się przedstawić w postaci sumy kwadratów czterech liczb całkowitych **dodatnich**?

Skądinąd: dziwne, ale prawdziwe jest, że każdą liczba naturalna jest sumą kwadratów czterech liczb całkowitych nieujemnych. Jak to przedstawienie wygląda dla 2^{2005}?

Zadanie 5
Ciąg $d_1, d_2, \ldots$ liczb naturalnych jest zdefiniowany w ten sposób, że dla $n = 1, 2, \ldots$ liczba d_{n+1} jest liczbą dodatnich dzielników d_n. Rozstrzygnij, dla jakich wartości $d_1 > 1$ ciąg (d_n) nie zawiera kwadratów liczb całkowitych.

Zadanie 6
Na bokach równoległoboku zbudowano, po zewnętrznej jego stronie, kwadraty o środkach O_1, O_2, O_3, O_4. Dowiedź, że $O_1O_2O_3O_4$ jest kwadratem.

1.1 Dwa zadania na prostą pomocniczą

Zadania pochodzą ze Staszica.

Zadanie 7
Dowiedź, że dla liczb dodatnich a, b, c zachodzi nierówność

$$\frac{a}{(b+c)^2} + \frac{b}{(a+c)^2} + \frac{c}{(a+b)^2} \geqslant \frac{9}{4(a+b+c)}.$$

Da się prostą pomocniczą, można też ciągami jednomonotonicznymi.

Zadanie ⋆ 8
Udowodnij, że jeśli x, y, z są liczbami dodatnimi, to zachodzi

$$\frac{\sqrt{y+z}}{x} + \frac{\sqrt{z+x}}{y} + \frac{\sqrt{x+y}}{z} \geqslant \frac{3\sqrt{6}}{\sqrt{x+y+z}}.$$