



# Zadania z Delty

JOACHIM JELISIEJEW  
22 LISTOPADA 2011

---

*Zadania są przeznaczone dla obu grup, choć ostatnie dwa, a zwłaszcza ostatnie, będą dla młodszych bardzo trudne.*

## ZADANIE 1

Dane są liczby rzeczywiste  $a \geq 1, b \geq 2, c \geq 3$ . Uzasadnij, że  $abc \geq a + b + c$ .

## ZADANIE 2

Dany jest trójkąt  $ABC$ , w którym  $AB = AC$  oraz  $\sphericalangle BAC = 90^\circ$ . Punkty  $D$  i  $E$  leżą odpowiednio na bokach  $AB$  i  $AC$ , przy czym  $|AD| = |CE|$ . Prosta przechodząca przez punkt  $A$  i prostopadła do prostej  $DE$  przecina prostą  $BC$  w punkcie  $P$ . Wykaż, że  $|AP| = |DE|$ .

## ZADANIE 3

W czworokącie wypukłym  $ABCD$  przekątne  $AC$  i  $BD$  są równej długości. Punkty  $M$  i  $N$  są odpowiednio środkami boków  $AD$  i  $BC$ . Wykaż, że prosta  $MN$  tworzy równe kąty z przekątnymi.

## ZADANIE 4

Czy liczbę  $2^{2005}$  da się przedstawić w postaci sumy kwadratów czterech liczb całkowitych  **dodatnich**?

*Skądinąd: dziwne, ale prawdziwe jest, że każdą liczbę naturalną jest sumą kwadratów czterech liczb całkowitych nieujemnych. Jak to przedstawienie wygląda dla  $2^{2005}$ ?*

## ZADANIE 5

Ciąg  $d_1, d_2, \dots$  liczb naturalnych jest zdefiniowany w ten sposób, że dla  $n = 1, 2, \dots$  liczba  $d_{n+1}$  jest liczbą dodatnich dzielników  $d_n$ . Rozstrzygnij, dla jakich wartości  $d_1 > 1$  ciąg  $(d_n)$  nie zawiera kwadratów liczb całkowitych.

## ZADANIE 6

Na bokach równoległoboku zbudowano, po zewnętrznej jego stronie, kwadraty o środkach  $O_1, O_2, O_3, O_4$ . Dowiedz, że  $O_1O_2O_3O_4$  jest kwadratem.