Choinkółko

kółko I LO Białystok

20 grudnia 2013

Zadanie 1 grudniowe kółko PG

Wyznacz wszystkie wielomiany $A(x), B(x), C(x), D(x)$ spełniające dla wszystkich liczb rzeczywistych warunki

1. $A(0) = 0$, $A(x) = \frac{1}{2}\left(A(x-1) + A(x+1)\right)$,
2. $xB(x-1) = (x-2)B(x)$,
3. $C(x^2) = C(x)^2$,
4. $D(x^2 - 2x) = (D(x-2))^2$.

Zadanie 2

Wielomian P o współczynnikach całkowitych ma cztery różne pierwiastki całkowite. Czy może on przyjąć wartość $P(x) = 5$ dla pewnej liczby całkowitej x?

Zadanie 3 grudniowe kółko PG

Wielomian $w(x)$ ma współczynniki całkowite oraz $|w(p)| = |w(q)| = 1$ dla liczb całkowitych $p < q$. Uzasadnij, że jeśli a jest pierwiastkiem wymiernym w, to $a = (p+q)/2$. Czy teza zadania pozostanie prawdziwa bez założenia, że w ma współczynniki całkowite?

Zadanie 4 klasyka

Liczby rzeczywiste x, y, z spełniają układ równań

$$x + y + z = 6, \quad xy + yz + zx = 11, \quad xyz = 6.$$

Oblicz te liczby.

Zadanie 5

Rozstrzygnij, czy istnieje wielomian W o współczynnikach całkowitych spełniający

$$W(20) = 12 \quad \text{oraz} \quad W(2013) = 2014.$$

Zadanie 6

Wielomian W o współczynnikach rzeczywistych przyjmuje wartość całkowitą dla każdej liczby całkowitej. Czy prawdą jest, że współczynniki W są całkowite?

Zadanie 7 staszic

Czy istnieje wielomian o współczynnikach całkowitych, którego wartość dla każdej liczby parzystej jest liczbą pierwszą?