



# Algi,

podgatunek: wielomiany

**Definicja** Stopień wielomianu dwóch zmiennych definiujemy jako największą z sum wykładników potęg przy  $x$  i  $Y$  i oznaczamy  $\deg$ , np.  $\deg x^2 = 2$ ,  $\deg x^4 + x^3y^3 + y^5 = 6$ .

**Definicja** Pierwiastek (rzeczywisty) wielomianu dwóch zmiennych  $W(x, y)$  to taka para liczb rzeczywistych, że  $(x_0, y_0)$ , że  $W(x_0, y_0) = 0$ .

## 1.1 Zadania

1. Udowodnij, że jeżeli liczby  $a, b \in \mathbb{R}$  są takie, że wielomian  $W(x) = ax^3 - ax^2 + 9bx - b$  ma trzy pierwiastki rzeczywiste dodatnie, to są one równe.

2. Rozwiąż układ równań

$$\begin{cases} x^5 - y^5 = 992 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

w liczbach rzeczywistych dodatnich  $x, y$ .

3. Czy wielomian dwóch zmiennych ma zawsze tylko skończenie wiele pierwiastków? Jeżeli tak, czy zawsze ma ich co najwyżej tyle, ile wynosi jego stopień?

4. Niech  $X$  będzie zbiorem pierwiastków wielomianu dwóch zmiennych  $W$ . Udowodnij, że dowolna prosta  $k$  przecina  $X$  tylko w skończenie wielu punktach lub cała prosta  $k$  jest zawarta w  $X$ .

5. Mając dane wielomiany dwóch zmiennych  $W_1, W_2$  skonstruuj wielomian dwóch zmiennych, który będzie się zerował wtedy i tylko wtedy, gdy zerują się  $W_1$  i  $W_2$ .

6. Niech  $n$  będzie liczbą nieparzystą. Udowodnij, że wielomian

$$(x^2 + 1)(x^2 + 2^2) \dots (x^2 + n^2) + 1$$

nie jest kwadratem wielomianu o współczynnikach całkowitych.

\* Udowodnij, że nie jest on kwadratem wielomianu o współczynnikach rzeczywistych.

## 1.2 Zadania domowe

1. Niech  $\alpha, \beta$  będą liczbami niewymiernymi takimi, że  $\alpha + \beta = 1$ . Dowiedz, że  $[m\alpha] + [m\beta] = m - 1$  dla każdej niezerowej liczby całkowitej  $m$  ( $[x]$  oznacza podłogę z  $x$ ).

2. Dla jakich  $a$  i  $b$  liczba 1 jest pierwiastkiem podwójnym wielomianu  $x^n + ax + b$ ?

3. Wyznaczyć najmniejszą wartość funkcji wymiernej  $x^{1000} + x^{900} + x^{90} + x^8 + \frac{1998}{x}$  dla  $x > 0$ .

4. \* Mając dane dwa rozłączne koła skonstruuj oś potęgową okręgów będących brzegami tych kół.