Zadania domowe – rozwiązania

1. Niech α, β będą liczbami niewymiernymi takimi, że $\alpha + \beta = 1$. Dowiedź, że $[m\alpha] + [m\beta] = m - 1$ dla każdej niezerowej liczby całkowitej m ($[x]$ oznacza podłogę z x).

   Rozwiązanie.

   Skoro m jest całkowite niezerowe, a α jest niewymierna, to $m\alpha$ jest niewymierna. Analogicznie niewymierna jest liczba $m\beta$.

   Z definicji podłogi mamy $m\alpha - 1 < [m\alpha] \leqslant m\alpha$, przy czym $m\alpha$ jest niewymierne, więc de facto $m\alpha - 1 < [m\alpha] < m\alpha$. Stąd $-m\alpha + 1 > -[m\alpha] > -m\alpha$, czyli $-m\alpha > -[m\alpha] - 1 > -m\alpha - 1$, więc, znowu z definicji podłogi $[-m\alpha] = -[m\alpha] - 1$.

   Zatem $[m\beta] = [m(1-\alpha)] = [m - m\alpha] = m + [-m\alpha] = m - 1 - [m\alpha]$.

   Alternatywne, dłuższe rozwiązanie

   Skoro m jest całkowite niezerowe, a α jest niewymierna, to $m\alpha$ jest niewymierna. Analogicznie niewymierna jest liczba $m\beta$.

   Niech $\{x\} := x - [x]$ dla każdej liczby rzeczywistej (jest to część ułamkowa). Z określenia podłogi jako największej liczby rzeczywistej nie większej od x wynika, że $\{x\} \in [0, 1)$, przy czym $\{x\} \in (0, 1)$ jeżeli x jest niecałkowite (w szczególności dla x niewymiernych).

   Mamy
   $$\{m\alpha\} + \{m\beta\} = m\alpha - [m\alpha] + m\beta - [m\beta] = m - [m\alpha] - [m\beta] \in \mathbb{Z}$$
   ale ustaliliśmy wyżej, że $\{m\alpha\}, \{m\beta\} \in (0, 1)$, stąd $\{m\alpha\} + \{m\beta\} \in (0, 2)$, czyli $\{m\alpha\} + \{m\beta\} = 1$ jest jedyną możliwością.

   Tym samym
   $$1 = \{m\alpha\} + \{m\beta\} = m - [m\alpha] - [m\beta]$$
   co kończy dowód.

2. Dla jakich a i b liczba 1 jest pierwiastkiem podwójnym wielomianu $x^n + ax + b$?

   Rozwiązanie.

   Liczba α jest podwójnym pierwiastkiem wielomianu W wtedy i tylko wtedy, gdy $W(\alpha) = 0$ i $W'(\alpha) = 0$ (wykład na PROSerwach).

   $W'(x) = nx^{n-1} + a$, więc $W'(1) = n + a$, czyli $W'(1) = 0 \Leftrightarrow a = -n$.

   $W(1) = 1 + a + b$, więc $W(1) = 0 \Leftrightarrow a + b + 1 = 0$.

   Stąd $W(1) = W'(1) = 0$ jest równoważne $a + b + 1 = a + n = 0$, czyli $a = -n, b = -n + 1$.

3. Wyznaczyć najmniejszą wartość funkcji wymiernej $x^{1000} + x^{900} + x^{90} + x^8 + \frac{1998}{x}$ dla $x > 0$.

   Rozwiązanie.

   Z nierówności pomiędzy średnią arytmetyczną i geometryczną:
   $$\frac{x^{1000} + x^{900} + x^{90} + x^8 + \underbrace{\frac{1}{x} + \frac{1}{x} + \ldots + \frac{1}{x}}_{1998}}{2002} \geqslant \sqrt{x^{1000} \cdot x^{900} \cdot x^{90} \cdot x^8 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^{1998}} = 1$$

lub, w notacji ważonej:

$$\frac{x^{1000}+x^{900}+x^{90}+x^{8}+\frac{1998}{x}}{2002} \geqslant \sqrt{x^{1000}\cdot x^{900}\cdot x^{90}\cdot x^{8}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^{1998}} = 1$$

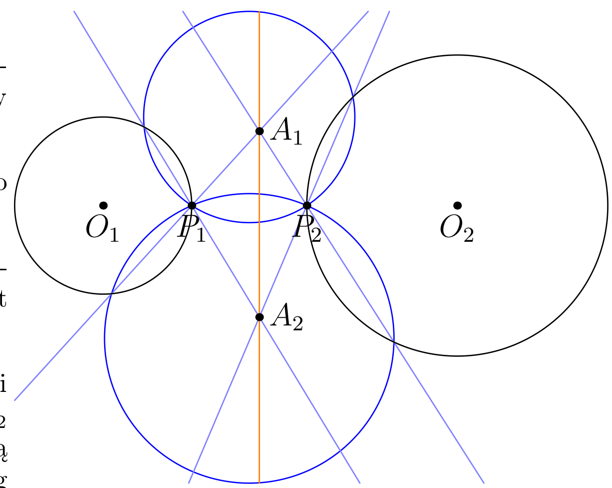
przy czym równość zachodzi dla $x = 1$. Zatem najmniejsza wartość to 2002 i jest przyjmowana dla $x = 1$.

4. * Mając dane dwa rozłączne koła skonstruuj oś potęgową okręgów będących brzegami tych kół.

Rozwiązanie.

Poniższe rozumowanie ma niezbyt proste uzasadnienie, lecz oferuje prostą konstrukcyjnie metodę. Przypomnijmy następujące fakty

- jeżeli dwa okręgi przecinają się, to ich oś potęgowa jest prostą przechodzącą przez punkty przecięcia,
- prosta potęgowa okręgów jest prostopadła do osi łączącej środki tych okręgów,
- dla dowolnych okręgów o_1, o_2, o_3 proste potęgowe o_1 i o_2, o_2 i o_3, o_3 i o_1 mają punkt wspólny.



Plan jest następujący: mając dwa rozłączne okręgi o_1, o_2 skonstruować okrąg o_3 przecinający o_1 i o_2 i taki, że osie potęgowe o_1 i o_3 oraz o_1 i o_2 nie są równoległe. Dla ustalenia uwagi może być to okrąg (patrz rys.) przecinający o_1 i o_2 w punktach, w których przecina je odcinek łączący ich środki.

Wyznaczamy (to brzmi dumnie) osie potęgowe o_1 i o_3 oraz o_2 i o_3 oraz ich punkt przecięcia, który jest punktem na osi potęgowej o_1 i o_2. Powtarzamy procedurę z innym okręgiem wyznaczając kolejny punkt na tej osi i rysujemy prostą przez wyznaczone punkty.