

Algebra 2*, zadania na ćwiczenia, seria XIII

Materiały do tej serii zadań można znaleźć w rozdziale 10 książki Atiyah-Macdonald. Pierwsze z poniższych zadań uzupełnia materiał z wykładu (na wykładzie nie dowiodłem, że $IL = L$).

1. Dowód twierdzenia Krulla o przecięciu. Niech A będzie pierścieniem noetherowskim z ideałem I zaś M skończenie generowanym R modulem, dla którego definiujemy podmoduł $L = \bigcap_{n \geq 1} I^n M$.
 - (a) Pokaż, że rodzina podmodułów $\{N \subseteq M : N \cap L = IL\}$ ma element maksymalny; oznaczmy go N_0 .
 - (b) Dla dowolnego $a \in I$ kładziemy $V_i^a = \{x \in M : a^i x \in N_0\}$; pokaż, że rodzina V_i^a też ma element maksymalny $V_{n(a)}^a$ i dla $i \geq n(a)$ zachodzi $V_i^a = V_{n(a)}^a$.
 - (c) Pokaż, że $(a^{n(a)}M + N_0) \cap L = IL$: kładąc $z = a^{n(a)}x + y \in L$, gdzie $x \in M$ i $y \in N_0$, wywnioskuj, że skoro $az \in IL \subset N_0$ to również $a^{n(a)+1}x \in N_0$ i dalej $a^{n(a)}x \in N_0$ co pociąga $z \in N_0 \cap L = IL$.
 - (d) Korzystając z maksymalności N_0 wywnioskuj, że $a^{n(a)}M \subseteq N_0$ i dalej, ponieważ a jest dowolne, $I^n M \subseteq N_0$, dla dostatecznie dużych n .
 - (e) Pokaż, że $IL = L$; skorzystaj z tego, że $L \subseteq I^n M \subseteq N_0$ oraz $N_0 \cap L = IL$.
2. Wnioski z twierdzenia Krulla. Niech A będzie noetherowską dziedziną z ideałem I .
 - (a) Pokaż, że $\bigcap_{n > 0} I^n = (0)$.
 - (b) Pokaż, że kanoniczny morfizm $A \rightarrow \widehat{A}$ w uzupełnieniu względem I jest włożeniem.
 - (c) Załóżmy dodatkowo, że A jest k -algebrą, $I = \mathfrak{m}$ jest maksymalny oraz $A/\mathfrak{m} = k$. Pokaż, że lokalizacja $A_{\mathfrak{m}}$ naturalnie wkłada się w uzupełnienie $\widehat{A}$ względem $\mathfrak{m}$. Wskazówka: każdy element $\notin \mathfrak{m}$ można zapisać jako $u(1-a)$, gdzie $u \in k$, $a \in \mathfrak{m}$ oraz $(1-a)^{-1} = 1 + a + a^2 + a^3 + \dots$ w $\widehat{A}$.
3. Rozpatrzmy funkcje rzeczywiste klasy C^∞ określone na otoczeniu $0 \in \mathbb{R}$. Funkcje $f_1 : U_1 \rightarrow \mathbb{R}$ i $f_2 : U_2 \rightarrow \mathbb{R}$ są w relacji $\sim$ jeśli istnieje otwarte $U \subset U_1 \cap U_2$ zawierające 0 takie, że $(f_1)|_U = (f_2)|_U$.

- (a) Pokaż, że na klasach relacji $\sim$ można wprowadzić naturalną strukturę pierścienia lokalnego bez dzielników zera (oznaczymy go $\mathcal{O}$), którego ideał maksymalny $\mathfrak{m}$ jest generowany przez klasę funkcji $x \mapsto x$.
- (b) Pokaż, że klasa funkcji e^{-1/x^2} należy do przecięcia $\bigcap_{i>0} \mathfrak{m}^i$.
4. Lemat Hensela. Niech $(A, \mathfrak{m})$ będzie pierścieniem lokalnym; założmy, że dla uzupełnienia względem ideału maksymalnego mamy naturalny izomorfizm $A = \widehat{A}$ (mówimy, że A jest zupełny). Dla wielomianu $f \in A[x]$ przez $\bar{f}$ oznaczamy jego wartość w $(A/\mathfrak{m})[x]$. Pokaż, że jeśli f jest unormowany i $\bar{f}$ rozkłada się na produkt wielomianów umormowanych względnie pierwszych $\bar{f} = \bar{g}\bar{h}$ w $(A/\mathfrak{m})[x]$ to istnieją umormowane $g, h \in A[x]$, że rozkład ten pochodzi z $f = gh$ w $A[x]$. Wskazówka: zadanie 9 w rozdziale 10 książki Atiyah-Macdonald.
5. Twierdzenie o funkcji uwikłanej. Niech $f \in k[x, y]$ będzie takie, że wielomian $f(0, y) \in k[y]$ ma prosty pierwiastek $a_0 \in k$. Pokaż, że istnieje $g \in k[[x]]$, $g = \sum_0^\infty a_i x^i$ takie, że $f(x, g(x)) = 0$.
6. Rozpatrzmy pierścień lokalny $A = k[x, y]_{(x, y)}$ z uzupełnieniem $\widehat{A}$. Pokaż, że $A/(y^2 - x^3 - x^2)$ jest dziedziną, natomiast $\widehat{A}/(y^2 - x^3 - x^2)$ nie jest dziedziną.