

Algebra 2*, zadania na ćwiczenia, seria XI

Przypomnijmy, że grupa Galois wielomianu to grupa automorfizmów rozszerzenia do ciała rozkładu tego wielomianu, S_n to grupa permutacji.

1. Rozpatrzmy ciało K takie, że $\mathbb{Q} \subset K \subset \mathbb{R}$, niech $p > 3$ będzie liczbą pierwszą. Dowiedź następujących stwierdzeń.

(a) Jeśli wszystkie pierwiastki wielomianu

$$f = x^n + a_3x^{n-3} + a_4x^{n-4} + \cdots + a_n \in K[x]$$

są rzeczywiste to $f = x^n$.

(b) Jeśli $f \in K[x]$ jest wielomianem nierozkładalnym stopnia p , który ma dokładnie $p - 2$ pierwiastki rzeczywiste to jego grupa Galois jest S_p .

2. Pokaż, że każde rozszerzenie ciał skończonych jest Galois i jego grupa automorfizmów jest cykliczna.

3. *Satz 90 Hilberta.* Niech $K \subset L$ będzie rozszerzeniem rozdzielczym i skończonym z normą i śladem $N(K \subset L)$ i $Tr(K \subset L)$ zdefiniowanymi w serii IX.

(a) Pokaż, że dla każdego $g \in Aut_K(L)$ i $a \in L$ zachodzi $N(K \subset L)(a/g(a)) = 1$ oraz $Tr(K \subset L)(a - g(a)) = 0$.

(b) Załóżmy dodatkowo, że $K \subset L$ jest rozszerzeniem Galois z $Aut_K(L) = \mathbb{Z}_d = \langle g \rangle$. Niech $a \in L$ spełnia warunek $N(K \subset L)(a) = 1$. Pokaż, że istnieje $b \in L$ takie, że $a = b/g(b)$. Wskazówka: z twierdzenia Dedekinda istnieje $c \in L$ takie, że $b = c + ag(c) + ag(a)g^2(c) + \cdots + ag(a) \cdots g^{d-2}(a)g^{d-1}(c) \neq 0$.

(c) Przy założeniach o $K \subset L$ jak wyżej pokaż, że jeśli $Tr(K \subset L)(a) = 0$ to istnieje $b \in L$ takie, że $a = b - g(b)$.

4. Skorzystaj z powyższego twierdzenia dla rozszerzenia $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(i)$ by pokazać, że każda trójka liczb całkowitych (a, b, c) spełniająca równanie $a^2 + b^2 = c^2$ jest proporcjonalna do trójki $(r^2 - s^2, 2rs, r^2 + s^2)$ dla pewnej pary liczb całkowitych (r, s) .

5. *Nullstellensatz dla ciał niedomkniętych.* Rozpatrzmy algebraiczne domknięcie $\bar{k}$ ciała k charakterystyki zero. O rozszerzeniu $k \subset \bar{k}$ zakładamy, że jest skończone z grupą Galois G . Mamy naturalne włożenie $k[x_1, \dots, x_n] \subset \bar{k}[x_1, \dots, x_n]$. Weźmy ideał $I \triangleleft k[x_1, \dots, x_n]$. Zbiór $\bar{k}$ -punktów ideału I to

$$V_{\bar{k}}(I) = \{(a_1, \dots, a_n) \in \bar{k}^n : \forall f \in I \quad f(a_1, \dots, a_n) = 0\}$$

- (a) Pokaż, że działanie grupy G na $\bar{k}$ indukuje działanie diagonalne G na $\bar{k}^n$, które zachowuje zbiór $V_{\bar{k}}(I)$.
 - (b) Pokaż, że każdy ideał maksymalny $m \triangleleft k[x_1, \dots, x_n]$ zawierający I jest postaci $m = k[x_1, \dots, x_n] \cap (x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n)$ gdzie $(a_1, \dots, a_n) \in V_{\bar{k}}(I)$.
 - (c) Pokaż, że mamy bijekcję pomiędzy ideałami maksymalnymi w $k[x_1, \dots, x_n]$ zawierający I a orbitami działania G na $V_{\bar{k}}(I)$.
6. Znajdź ideały maksymalne zawierające podany ideał

(a) $(x^2 + y^2) \triangleleft \mathbb{R}[x, y]$

(b) $(x^2 + y^2) \triangleleft \mathbb{Q}[x, y]$