

Algebra 2*, zadania na ćwiczenia, seria X

Teoria Galois. Materiały do tej serii zadań m.in. w rozdziale VII książki Aluffiego *Algebra, Chapter 0.* oraz w książce *Fields and Galois theory* Milnogo. Jak zwykle p oznacza liczbę pierwszą.

1. Niech $K \supset \mathbb{Q}$ będzie ciałem rozkładu unormowanego wielomianu nierozkładalnego $f \in \mathbb{Q}[x]$ stopnia d , którego pierwiastki oznaczamy przez $x_1, \dots, x_d$.
 - (a) Pokaż, że grupa automorfizmów rozszerzenia $\mathbb{Q} \subset K$ jest podgrupą grupy permutacji S_n , która działa tranzytywnie na pierwiastkach $\{x_1, \dots, x_d\}$.
 - (b) Wyróżnikiem wielomianu f nazywamy liczbę zespoloną $\Delta_f = \prod_{i < j} (x_i - x_j)^2$. Pokaż, że liczba Δ_f jest zawsze wymierna i policz ją w zależności od współczynników f dla $d = 2$ i 3 .
 - (c) Pokaż, że dla $d = 3$ grupa automorfizmów rozszerzenia $\mathbb{Q} \subset K$ jest równa albo S_3 , albo $\mathbb{Z}_3$, w zależności od tego czy liczba $\sqrt{\Delta_f}$ jest wymierna.
2. Opisać grupę Galois rozszerzenia $\mathbb{Q} \subset L$, gdzie L jest ciałem rozkładu wielomianu $f \in \mathbb{Q}[x]$ podanego poniżej; podać ciała pośrednie tego rozszerzenia oraz odpowiadające im podgrupy grupy Galois; które z pośrednich rozszerzeń są normalne?

(a) $f = x^3 - x - 1$,

(b) $f = x^4 + 2$,

(c) $f = x^5 - 5$,

(d) $f = x^4 + x^2 + 1$

3. Niech $K \subset L$ będzie rozszerzeniem algebraicznym ciał. Na grupie $\text{Aut}(L/K)$ definiujemy topologię Krulla za pomocą bazy

$$U(a_1, \dots, a_r, b_1, \dots, b_r) = \{g \in \text{Aut}(L/K) \mid \forall i : g(a_i) = b_i\}$$

gdzie $a_i, b_i \in L$ zaś r jest dowolne.

- (a) Pokaż, że ta definicja daje topologię Hausdorffa na $\text{Aut}(L/K)$ oraz działania grupowe są ciągłe w tej topologii.
- (b) Pokaż, że dla dowolnego rozszerzenia pośredniego $K \subset M \subset L$ grupa $\text{Aut}(L/M) \subset \text{Aut}(L/K)$ jest podgrupą domkniętą oraz, jeśli ponadto $[M : K] < \infty$ to jest również podgrupą otwartą.

4. W sytuacji poprzedniego zadania załóżmy ponadto, że rozszerzenie $K \subset L$ jest normalne i rozdzielcze (czyli Galois).
 - (a) Weźmy rozszerzenie pośrednie $K \subset M \subset L$. Pokaż, że $[M : K] < \infty$ wtedy i tylko wtedy $[Aut(L/K) : Aut(L/M)] < \infty$ oraz w tej sytuacji $[M : K] = [Aut(L/K) : Aut(L/M)]$.
 - (b) Dla podgrupy $H < Aut(L/K)$ weźmy ciało elementów stałych jej działania $M = L^H$. Pokaż, że $Aut(L/M)$ jest domknięciem H w $Aut(L/K)$.
 - (c) Twierdzenie Galois: Pokaż, że istnieje naturalna bijekcja pomiędzy rozszerzeniami pośrednimi $K \subset L$ a domkniętymi podgrupami $Aut(L/K)$.
5. Niech p będzie liczbą pierwszą oraz $G < S_p$ podgrupą rozwiązalną, która działa przechodnio (transytywnie) na zbiorze $[p] = \{1, \dots, p\}$ (przy działaniu naturalnym).
 - (a) Pokaż, że każda z (nietrywialnych) grup w ciągu podgrup rozwiązujących G działa przechodnio na zbiorze $[p]$.
 - (b) Pokaż, że G zawiera dokładnie jedną podgrupę cykliczną rzędu p (i jest to dzielnik normalny).
 - (c) Pokaż, że każdy nietrywialny element G ma co najwyżej jeden punkt stały.
6. Niech wielomian $f \in K[x]$ będzie nierozkładalny stopnia p będącego liczbą pierwszą. Pokazać, że jeśli grupa Galois wielomianu f jest rozwiązalna to dla dowolnego rozszerzenia $K \subset L$ wielomian f ma w L dokładnie 0 lub 1, lub p pierwiastków.