

Algebra 2*, zadania na ćwiczenia, seria IX

Materiały do tej części wykładu i ćwiczeń znajdują Państwo w rozdziale VII książki Aluffiego *Algebra, Chapter 0* oraz w książce *Fields and Galois theory* Milnego. Jak zwykle p oznacza liczbę pierwszą.

1. Rozpatrzmy rozszerzenie $\mathbb{F}_p(x^p, y^p) \subset \mathbb{F}_p(x, y)$.
 - (a) Pokaż, że jest ono skończone i normalne.
 - (b) Znajdź domknięcie rozdzielcze ciała $\mathbb{F}_p(x^p, y^p)$ w $\mathbb{F}_p(x, y)$.
 - (c) Pokaż, że to rozszerzenie ma nieskończoną liczbę rozszerzeń pośrednich.
2. Niech $K \subset L$ będzie rozszerzeniem skończonym i weźmy $a \in L$. Mnożenie przez a elementów z L wyznacza przekształcenie K -liniowe $L \rightarrow L$, przez $Tr(K \subset L)(a)$ oraz $N(K \subset L)(a)$ oznaczmy ślad i wyznacznik tego przekształcenia a odpowiednie przekształcenia z L o wartościach w K oznaczamy $Tr(K \subset L)$ i $N(K \subset L)$ i nazywamy śladem i normą rozszerzenia.
 - (a) Załóżmy, że $L = K(a) \supset K$ i $f = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$ jest wielomianem minimalnym dla a . Znajdź $Tr(K \subset L)(a)$ oraz $N(K \subset L)(a)$.
 - (b) Pokaż, że $Tr(K \subset L)$ jest funkcjonałem liniowym na L a $N(K \subset L)$ wyznacza homomorfizm grup multiplikatywnych $L^* \rightarrow K^*$.
 - (c) Rozpatrzmy ciąg rozszerzeń skończonych $K \subset L \subset M$; pokaż, że ślady rozszerzeń dobrze się składają.
 - (d) Przy założeniach jak wyżej, definiujemy przekształcenie $T : L \times L \rightarrow K$ dla $a, b \in L$ następującym wzorem $T(a, b) = Tr(K \subset L)(ab)$. Pokaż, że T jest funkcjonałem dwuliniowym symetrycznym.
3. Niech $K \subset L$ będzie rozszerzeniem rozdzielczym i skończonym. Niech $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ będą wszystkimi (różnymi) zanurzeniami K w $\overline{K}$ (nad K).
 - (a) Pokaż, że $Tr(K \subset L)(a) = \sum_i \varphi_i(a)$ oraz $N(K \subset L)(a) = \prod_i \varphi_i(a)$.
 - (b) Pokaż, że funkcjonał T jest maksymalnej rangi (niezdegenerowany).

4. Niech $K \subset L$ będzie rozszerzeniem ciał skończonych mocy q i q^m , gdzie $q = p^n$. Pokaż, że grupa automorfizmów tego rozszerzenia jest cykliczna i generowana przez Φ^n , gdzie Φ jest homomorfizmem Frobeniusa. Znajdź ciała pośrednie tego rozszerzenia i odpowiadające im podgrupy grupy automorfizmów.
5. Niech $\mu_d \in \mathbb{C}$ będzie pierwiastkiem pierwotnym stopnia d z jedności.
 - (a) Pokaż, że rozszerzenie $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\mu_d)$ jest Galois.
 - (b) Pokaż, że grupa automorfizmów ciała $\mathbb{Q}(\mu_d)$ jest przemienna oraz jeśli d jest liczbą pierwszą to jest cykliczna.
 - (c) Wyznaczyć stopień rozszerzenia $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\mu_d)$ oraz jego grupę automorfizmów $\mathbb{Q}(\mu_d)$ dla $d = 4, 5, 6, 8$.
 - (d) Zilustrować zasadnicze twierdzenie teorii Galois dla rozszerzeń podanych powyżej: podać ciała pośrednie i odpowiadające im podgrupy grupy Galois.
6. Przy oznaczeniach z poprzedniego zadania.
 - (a) Pokaż, że rozszerzenie $\mathbb{Q}(\mu_d)(t^d) \subset \mathbb{Q}(\mu_d)(t)$ jest Galois i znajdź jego grupę automorfizmów; t oznacza tu zmienną lub element przestępny nad $\mathbb{Q}$.
 - (b) Pokaż, że dla dowolnego całkowitego $a > 1$ rozszerzenie $\mathbb{Q}(\mu_d) \subset \mathbb{Q}(\mu_d)(\sqrt[d]{a})$ jest Galois; czy jego grupa Galois jest cykliczna? (Na początek można założyć, że a nie dzieli się przez kwadrat liczby pierwszej.)