

Algebra 2*, zadania na ćwiczenia, seria VIII

Materiały do tej części wykładu i ćwiczeń znajdują Państwo w rozdziale VII książki Aluffiego *Algebra, Chapter 0*.

1. Wielomian cyklotomiczny Φ_n dla $n \geq 1$ jest, z definicji, produktem $\prod_{\mu_n}(x - \mu_n)$, gdzie μ_n przebiega wszystkie pierwiastki pierwotne stopnia n z jednościami (zob. podrozdział 5.2 w rozdziale VII książki Aluffiego).
 - (a) Pokaż, że dla $n \geq 2$ stopień Φ_n jest równy $\phi(n)$, gdzie ϕ oznacza funkcję Eulera.
 - (b) Pokaż, że $x^m - 1 = \prod_{n|m} \Phi_n(x)$ i policz Φ_{2^n} .
 - (c) Wykaż, że Φ_n ma współczynniki całkowite.
 - (d) Pokaż, że wielomian Φ_n jest nierozkładalny w $\mathbb{Q}[x]$.¹
 - (e) Pokaż, że jeśli dla pewnego całkowitego $a \geq 2$ liczba $\Phi_n(a)$ dzieli $a - 1$ to $n = 1$.
 - (f) Pokaż, że jeśli dla liczb całkowitych $a \geq 2$ i $d < n$ iloraz $(a^n - 1)/(a^d - 1)$ jest całkowity to jest również podzielny przez $\Phi_n(a)$.
2. Rozpatrzmy rozszerzenia algebraiczne $K \subset L$, $L \subset M$ oraz ich złożenie $K \subset M$.
 - (a) Czy jeśli dwa z powyższych rozszerzeń są normalne to i to trzecie jest normalne (rozważ wszystkie przypadki, podaj przykłady)?
 - (b) To samo pytanie dla rozszerzeń rozdzielczych.
3. Rozpatrzmy rozszerzenie algebraiczne ciał $K \subset L$. Pokaż, że zbiór elementów ciała L , które są rozdzielcze nad K jest ciałem (nazywamy je domknięciem rozdzielczym K w L). Pokaż, że najmniejsze rozszerzenie normalne $K \subset \bar{L}$, takie że $L \subset \bar{L}$, jest jednoznaczne z dokładnością do izomorfizmu (nazywamy je normalnym domknięciem L nad K).

¹Wskazówka: jeśli byłby rozkładalny to moglibyśmy napisać $\Phi_n = f \cdot g$ gdzie $f, g \in \mathbb{Z}[x]$ oraz $f(\mu_n) = 0 = g(\mu_n^p)$ dla pewnego pierwiastka pierwotnego μ_n stopnia n z jednościami i pewnego p pierwszego nie dzielącego n . Wynioskuj z tego, że po zredukowaniu współczynników modulo p wielomian f_p będzie dzielił wielomian g_p^p w pierścieniu $\mathbb{F}_p[x]$ a wobec tego f_p i g_p nie są względnie pierwsze w tym pierścieniu co prowadzi do sprzeczności z rozdzielczością Φ_n nad $\mathbb{F}_p$.

4. Ciało K nazywamy doskonałym jeśli każde jego rozszerzenie algebraiczne jest rozdzielcze.
 - (a) Pokaż, że każde ciało skończone jest doskonałe.
 - (b) Pokaż, że ciało charakterystyki $p > 0$ jest doskonałe wtedy i tylko wtedy gdy jego endomorfizm Frobeniusa jest automorfizmem.
 - (c) Pokaż, że ciało K charakterystyki $p > 0$ jest doskonałe wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $a \in K$ wielomian $x^p - a$ ma pierwiastek w K .
5. Rozpatrzmy rozszerzenie $K \subset L$. Różniczkowaniem K (o wartościach w L) nazywamy przekształcenie $D : K \rightarrow L$, które jest addytywne $D(a + b) = D(a) + D(b)$ i spełnia regułę Leibniza $D(ab) = aD(b) + bD(a)$.
 - (a) Pokaż, że dla $a \in K$ mamy $D(a^n) = na^{n-1}D(a)$ oraz dla $f \in K[x]$ zachodzi $D(f(a)) = f^D(a) + f'(a) \cdot D(a)$, gdzie f' to (zwykła) pochodna wielomianu a f^D to wielomian otrzymany z f przez zastąpienie jego współczynników przez ich obrazy względem D .
 - (b) Pokaż, że jeśli D_1 i D_2 są różniczkowaniami to $D_1 + D_2$ oraz $D_1 D_2 - D_2 D_1$ też są różniczkowaniami.
 - (c) Pokaż, że ciało doskonałe dodatniej charakterystyki ma wyłącznie zerowe różniczkowania.
6. Niech $K_1 \subset K_2$ będzie skończonym rozszerzeniem rozdzielczym. Pokaż, że każde różniczkowanie D ciała K_1 można jednoznacznie rozszerzyć do różniczkowania $\overline{D}$ ciała K_2 . Wskazówka: z tw. Abela $K_2 = K_1(a)$, gdzie a jest elementem rozdzielczym z wielomianem minimalnym $f_a \in K_1[x]$. Wówczas musi zachodzić $\overline{D}(a) = -f_a^D(a)/f_a'(a)$.