

Algebra 2*, zadania na ćwiczenia, seria VII

Algebraiczne domknięcie ciała, ciało rozkładu wielomianu, pierwiastki z jedności.

Materiały do tej części wykładu i ćwiczeń znajdują Państwo w rozdziale VII książki Aluffiego *Algebra, Chapter 0*.

1. Niech $\overline{K}$ będzie algebraicznym domknięciem ciała K . Pokazać, że każdy automorfizm ciała K rozszerza się do automorfizmu ciała $\overline{K}$.
 - (a) Niech $\overline{\mathbb{Q}}$ będzie algebraicznym domknięciem ciała liczb wymiernych. Wykazać, że ciało $\overline{\mathbb{Q}}$ ma nieskończenie wiele automorfizmów.
 - (b) Pokaż, że grupa automorfizmów ciała liczb rzeczywistych jest trywialna. (Wskazówka: zauważ najpierw, że jeśli $x > 0$ i h jest automorfizmem $\mathbb{R}$, to $h(x) > 0$.)
2. Niech K będzie ciałem charakterystyki $\neq 2$. Pokazać, że każde rozszerzenie $K \subset L$ stopnia 2 jest ciałem rozkładu wielomianu postaci $x^2 - a \in K[x]$, gdzie $a \in K$. Czy jest to prawda również dla ciała charakterystyki 2?
3. Znaleźć stopień nad $\mathbb{Q}$ ciał rozkładu następujących wielomianów:
 - (a) $x^2 - 2$,
 - (b) $x^3 - 2$,
 - (c) $x^4 - 2$,
 - (d) $x^4 + x^2 + 1$.
4. Niech L będzie ciałem rozkładu wielomianu $f \in K[x]$ gdzie $\deg(f) = n$. Pokazać, że $[L : K] \leq n!$. Czy stopień rozszerzenia $[L : K]$ dzieli liczbę $n!$?
5. Niech $f, g \in K[x]$. Dowieść, że ciało rozkładu wielomianu f jest zawarte w ciele rozkładu wielomianu $f(g(x)) \in K[x]$.
6. Niech K będzie ciałem charakterystyki $p > 0$. Odwzorowanie Frobeniusa $\Phi : K \rightarrow K$ zadane jest wzorem $\Phi(a) = a^p$.
 - (a) Pokaż, że Φ jest homomorfizmem (endomorfizmem) ciała K i jeśli K jest ciałem skończonym to Φ jest również jego automorfizmem.
 - (b) Znajdź zbiór elementów stałych K^{Φ^n} .

- (c) Pokaż, że dla każdego n każde ciało algebraicznie domknięte charakterystyki p zawiera dokładnie jedno podciało mocy p^n .
 - (d) Pokaż, że jeśli moc ciała jest p^n to grupa jego automorfizmów jest cykliczna mocy n i generowana przez Φ .
7. Ustalmy ciało K . Dla liczby naturalnej d przez $\mu_d(K)$ oznaczmy zbiór elementów ciała K , które są rozwiązaniami równania $x^d = 1$, elementy $\mu_d(K)$ nazywamy pierwiastkami z jednościami stopnia d w K . Pierwiastek pierwotny stopnia d z definicji nie jest potęgą innego pierwiastka stopnia d .
- (a) Pokaż, że $\mu_d(K)$ jest podgrupą grupy multiplikatywnej ciała K oraz $\mu_r(K)$ jest podgrupą $\mu_d(K)$ o ile r dzieli d .
 - (b) Pokaż, że jeśli K jest ciałem algebraicznie domkniętym charakterystyki 0 to grupa $\mu_d(K)$ jest cykliczna rzędu d .
 - (c) Niech $a \in \overline{\mathbb{Q}}$ będzie pierwiastkiem pierwotnym stopnia d , znajdź jego stopień nad $\mathbb{Q}$.
8. Załóżmy, że K jest ciałem algebraicznie domkniętym charakterystyki $p > 0$.
- (a) Niech q jest liczbą pierwszą różną od p . Pokaż, że $\mu_{q^r}(K)$ jest grupą cykliczną rzędu q^r dla każdego $r \geq 0$
 - (b) Pokaż, że jeśli p nie dzieli n to $\mu_n(K)$ jest grupą cykliczną rzędu n .
 - (c) Dla dowolnego $n > 0$ pokaż, że $\mu_n(K)$ jest grupą cykliczną.